272

ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ Δ. ΚΩΤΣΑΚΗ
Ἀριστούχου τῶν Μαθηματικῶν

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΜΙΑΣ ΤΑΞΕΩΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ MONGE

Ἐναίσιμος ἐπὶ διδακτορίᾳ διατριβή, ὑποβληθεῖσα εἰς τὴν Φυσικομαθηματικὴν Σχολὴν τοῦ Ἐθνικοῦ καὶ Καποδιστριακοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν.

Πρωτότυπο διαθέσιμο στο Μουσε΄θο του Τομέα Αστρονομίας, Αστροφυσικής και Μηχανικής, στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΤΥΠΟΙΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΥ ΠΑΠΑΣΠΥΡΟΥ
Ὁδὸς Λέκα — Στοὰ Σιμοπούλου
1937

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΕΩΣ ΜΙΑΣ ΤΑΞΕΩΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ MONGE

1. **Εἰσαγωγή.** Τὸ πρόβλημα τῆς ὁλοκληρώσεως ἑνὸς συστήματος τῆς μορφῆς

(1) $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$

ὅπου f_i εἶναι συναρτήσεις ὁμογενεῖς τῶν $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{n+1}$ συνίσταται εἰς τὸ νὰ ἐκφράσωμεν τὰ $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ δι' ὡρισμένων συναρτήσεων μιᾶς παραμέτρου α, μιᾶς αὐθαιρέτου συναρτήσεως τῆς παραμέτρου ταύτης καὶ τῶν διαδοχικῶν παραγώγων τῆς συναρτήσεως αὐτῆς ὡς πρὸς α, μέχρις ὡρισμένης τάξεως.

Μία τοιαύτη λύσις θὰ καλῆται ἐκπεφρασμένη (explicité).

Ὁ Monge*) ἔλυσε τὸ πρόβλημα τοῦτο εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $n=2, k=1$, διὰ τοῦτο κατ' ἀναλογίαν τὸ ὡς ἄνω πρόβλημα ἐκλήθη ἔκτοτε πρόβλημα τοῦ Monge. Μετὰ ταῦτα, λόγῳ τῆς μεγάλης χρησιμότητος τῶν ἐξαγομένων τῶν ἀναφερομένων εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο, εἰς διαφόρους κλάδους τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως, πολλοὶ μαθηματικοί, ὅπως οἱ Serret, Darboux, Hadamard, Goursat, Hilbert, Cartan, Ζερβὸς καὶ ἄλλοι ἠσχολήθησαν μὲ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου ἐξετάσαντες περιπτώσεις καθ' ἃς ἔχομεν $n>2$, $k<n-1$.

2. Ὁ γάλλος μαθηματικὸς É. Goursat παρέχει**) ἐξαγόμενα τινὰ ἐν σχέσει μὲ συστήματα τοῦ Monge, λύων τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα:

«Δοθέντος ἑνὸς συστήματος ἐξισώσεων τοῦ Monge (1), ὅπου

---

*) Τὸ 1781, εἶχεν ἀποδείξει ὁ Monge (Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences, Hist. de l'Acad. d. Sc.). ὅτι, ὅταν δυνηθῇ τις νὰ ὁλοκληρώσῃ μίαν διαφορικὴν ἐξίσωσιν μὲ μερικὰς παραγώγους, λαμβάνει ἀμέσως γενικωτέρας τῶν χαρακτηριστικῶν καμπύλας, τὰς κληθείσας ὑπὸ τοῦ Sophus Lie ὁλοκληρωτικάς, αἱ ὁποῖαι, ἐκτὸς τοῦ ὅτι ἔχουν τὴν ἰδιότητα εἰς ἕκαστον τῶν σημείων των νὰ ἐφάπτωνται τοῦ ἀντιστοίχου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο κώνου (Γ), ἐπὶ πλέον εἶναι τοιαῦται, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι κατὰ μῆκος αὐτῶν χαρακτηριστικαὶ καμπύλαι, νὰ παράγουν ὁλοκληρωτικὰς ἐπιφανείας.

**) Bul. Soc. Math. de France, tom. 33, 1905 p. 201—213.

$k=n-1$, δυνάμεθα ν' ἀντιστοιχήσωμεν εἰς αὐτὸ ἓν σύστημα $n-1$ ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως τῆς μορφῆς:

$$(2)\quad F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, p_1, p_2, \ldots, p_n)=0 \qquad (i=1,2,\ldots,n-1)$$

ὅπου τὰ p_k $(k=1,2,\ldots n)$ δηλοῦν τὰς μερικὰς παραγώγους τοῦ x_{n+1} ὡς πρὸς x_k. Ἡ ὕπαρξις πλήρους ὁλοκληρώματος τοῦ ***συνδεδεμένου*** (associé) εἰς τὸ (1) συστήματος (2) ἄγει ἀμέσως εἰς τὴν λύσιν τοῦ ἐν λόγῳ συστήματος τοῦ Monge. Πρὸς τοῦτο δέον τὸ σύστημα (2) νὰ εἶναι ἐν ἐνελίξει (en involution)» .

Τὸ (2) προκύπτει ὡς ἑξῆς :

Ἐπισυνάπτομεν εἰς τὸ σύστημα (1) τὴν ἐξίσωσιν

$$dx_{n+1}=p_1\,dx_1+p_2dx_2+\ldots+p_n\,dx_n$$

καὶ ἀπαλείφομεν μεταξὺ ταύτης καὶ τῶν (1) τὰς $n-1$ ἐκφράσεις

$$\frac{dx_\lambda}{dx_1} \qquad (\lambda=3,4,\ldots,n+1)$$

ὅτε φθάνομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\sigma(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, p_1, \ldots, p_n, \alpha)=0$$

ὅπου $\alpha=\dfrac{dx_2}{dx_1}$ καὶ δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ α μεταξὺ τῶν n σχέσεων

$$(3)\qquad \sigma=0,\ \frac{\partial\sigma}{\partial\alpha}=0,\ \frac{\partial^2\sigma}{\partial\alpha^2}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial^{n-1}\sigma}{\partial\alpha^{n-1}}=0$$

ποριζόμεθα τὸ συνδεδεμένον σύστημα (2). Ἐὰν τὸ (2) εἶναι ἐν ἐνελίξει, ἡ λύσις τοῦ ἐν λόγῳ συστήματος τοῦ Monge ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ πλήρους ὁλοκληρώματος τοῦ (2). Ἔστω

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \alpha, \beta)=0$$

τὸ πλῆρες ὁλοκλήρωμα τοῦ (2)· ἡ σχέσις αὕτη ὁμοῦ μετὰ τῶν :

$$\frac{dV}{d\alpha}=0,\ \frac{d^2V}{d\alpha^2}=0,\ \ldots,\ \frac{d^nV}{d\alpha^n}=0$$

ὅπου ἡ παράμετρος β ἔχει ἀντικατασταθῆ διὰ μιᾶς αὐθαιρέτου συναρτήσεως τοῦ α, μᾶς δίδει λύσιν ἐκπεφρασμένην τοῦ συστήματος (1).

Ὁ Goursat, δίδων τὰ ἀνωτέρω ἐξαγόμενα, προσθέτει μετὰ ταῦτα τὰ ἑξῆς (Μνημ. ἐργασίαν § 5) :

«Τὰ πραγματευθέντα συστήματα εἶναι προφανῶς πολὺ μερικά. Ἐνίοτε ὅμως δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν τὴν μέθοδον εἰς συστήματα τοῦ Monge πολὺ γενικώτερα, ἂν μιμηθῶμεν τὴν μέθοδον ὁλοκληρώσεως τῶν Lagrange-Charpit διὰ μίαν ἐξίσωσιν μὲ μερικὰς παραγώγους. Δοθέντος π.χ. ἑνὸς συστήματος $n-k$ ἐξισώσεων τοῦ Monge

(k > 1) διὰ νὰ ἐφαρμόσωμεν τὴν προτέραν μέθοδον ἀρκεῖ νὰ δυνάμεθα νὰ ἐπισυνάψωμεν k—1σχέσεις*) τῆς ἰδίας μορφῆς, οὕτως ὥστε τὸ συνδεμένον (associé) σύστημα τοῦ οὕτω προκύπτοντος συστήματος τοῦ Monge νὰ εἶνε ἐν ἐνελίξει».

Ὡς ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου του ταύτης δίδει τὴν λύσιν τῆς γνωστῆς ἐξισώσεως τοῦ Serret :

$$dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2=dx_4^2.$$

3. Εἰς τὴν παροῦσαν ἐργασίαν γενικεύομεν κατ' ἀρχὰς πρότασιν τοῦ κ. Τζώρτζη **)ἐν σχέσει μετὰ ἓν ἐνελίξει συστήματα ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως, ἡ ὁποία εἶναι πολὺ χρήσιμος εἰς τὴν μελέτην ὡρισμένης τάξεως ἐξισώσεων τοῦ Monge.

Ἐν συνεχείᾳ μελετῶμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\rho_1 dx_1^2+\rho_2 dx_2^2+\rho_3 dx_3^2=dx_4^2$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ ρ_1, ρ_2, ρ_3 ὑποτίθενται συναρτήσεις τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν x_1, x_2, x_3 ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀνωτέρω μεθόδου τοῦ Goursat καὶ ἀγόμεθα εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι μόνον ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν τὰ ρ_1, ρ_2, ρ_3 εἶναι ποσότητες σταθεραί, ἢ ὡς ἄνω ἐξίσωσις δέχεται λύσιν ἐκπεφρασμένην, τὰ ἐξαγόμενα δὲ τὰ ἀφορῶντα τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἐπεκτείνομεν καὶ εἰς τὴν γενικὴν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς:

$$\rho_1 dx_1^2+\rho_2 dx_2^2+\ldots\ldots+\rho_n dx_n^2=dx^2_{n+1}.$$

Τέλος ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις δὲν ἀνήκει εἰς μίαν νέαν κατηγορίαν ἐξισώσεων τοῦ Monge, μελετηθεισῶν ἐσχάτως ὑπὸ τοῦ Goursat***), αἵτινες ὁρίζουν τὰς ἰδιαζούσας πολλαπλότητας ἐν σχέσει πρὸς τὸ πρόβλημα τοῦ Cauchy, ἑνὸς ἐν ἐνελίξει συστήματος ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως καὶ αἱ ὁποῖαι δέχονται λύσιν ἐκπεφρασμένην.

4. ***Γενίκευσις ἰδιότητος τῶν ἐν ἐνελίξει συστημάτων.*** Ἐπειδὴ ἡ ἀπαλοιφὴ τῆς παραμέτρου α εἰς τὸ ἐνδιάμεσον σύστημα (3) εἶνε δύσκολος τίθεται τὸ γενικώτερον ἐρώτημα, μήπως εἶναι δυνατὸν νὰ πληροφορηθῶμεν ἐὰν ἓν σύστημα ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους

---

*) Πᾶν σύστημα τοιούτων σχέσεων θὰ καλοῦμεν κατωτέρω συνημμένον σύστημα. (Βλ. Α. Τζώρτζη: Περὶ τῆς ὁλοκληρώσεως μιᾶς τάξεως ἐξισώσεων τοῦ Monge κλπ. ἐν Δελτ. Ἑλλην. Μαθ. Ἑταιρείας τόμ. ΙΕ' 1934).

**) Ἔνθ. ἀνωτ. σελ. 20.

***) E. Goursat : Sur quelques équations de Monge intérgrables explicitement (An. d. R. Scuola Sup. di Pisa, Vol. I. 1932—X).

πρώτης τάξεως, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐξ ἑνὸς ἄλλου τοιούτου, δι' ἀπαλοιφῆς παραμέτρου τινὸς εἶναι ἐν ἐνελίξει, χωρὶς νὰ εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀπαλοιφὴν τῆς παραμέτρου ταύτης ;

Ὁ κ. Ζερβὸς ἐξετάζει *) περιπτώσεις τινὰς καθ' ἃς ἡ ἀπαλοιφὴ τῆς παραμέτρου α εἰς τὸ διαφορικὸν σύστημα (3) μᾶς δίδει σύστημα ἐν ἐνελίξει. Ἀκολούθως ὁ κ. Τζώρτζης ἀποδεικνύει **) μίαν πρότασιν κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι δυνατὸν νὰ ἴδωμεν ἐκ τοῦ ἐνδιαμέσου συστήματος (3), ἐὰν τὸ συνδεδεμένον (associé) εἶναι ἐν ἐνελίξει, χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν ἀπαλοιφὴν τῆς παραμέτρου ταύτης.

5. Κατωτέρω δίδομεν μίαν γενίκευσιν τῆς ἰδιότητος ταύτης τῶν ἐν ἐνελίξει συστημάτων.

Πρότασις. «Ἔστω ἕν σύστημα n διαφορικῶν ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως τῆς μορφῆς

$$(4) \qquad \varphi_i\,(x_1, x_2 \ldots x_n\,,\ p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n\,, \alpha) = 0 \qquad (i = 1,2,..n)$$

ὅπου ὑποθέτομεν διὰ τὴν εὐκολίαν τῶν ὑπολογισμῶν μας, ὅτι δὲν εἰσέρχεται εἰς αὐτὸ ἡ ἄγνωστος συνάρτησις z καὶ ὅπου ἀκόμη τὸ α εἶναι βοηθητική τις παράμετρος· ἐὰν τὸ σύστημα (4) εἶναι ἐν ἐνελίξει, ἤτοι ἐὰν ἔχωμεν ἐκ ταυτότητος

$$(5) \qquad (\varphi_h\,,\ \varphi_i\,) = 0 \qquad (h,i = 1,\ 2,\ \ldots n)$$

τοῦ α θεωρουμένου ὡς σταθεροῦ, τότε καὶ τὸ διαφορικὸν σύστημα, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ δοθέντος δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ α, θὰ εἶναι ἐν ἐνελίξει».

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου θεωροῦμεν λελυμένην τὴν μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (4) π. χ. τὴν τελευταίαν, ὡς πρὸς α· ἔστω :

$$(4') \qquad \alpha = \sigma(x_1,\ x_2, \ldots x_n\,,\ p_1,\ p_2, \ldots p_n\,).$$

Ἀρκεῖ τότε νὰ δείξωμεν ὅτι ἔχομεν πάντοτε ἐκ ταυτότητος :

$$(5') \qquad (\varphi_k\,,\ \varphi_\lambda\,) = 0 \qquad (k,\ \lambda = 1,\ 2, \ldots n-1)$$

ὅπου ἡ εἰς τὰς συναρτήσεις αὐτὰς παρουσιαζομένη βοηθητικὴ παράμετρος α ἔχει ἀντικατασταθῆ ὑπὸ τῆς τιμῆς της ἐκ τῆς (4').

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν λοιπὸν τὰς παρενθέσεις τοῦ Poisson ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἔκφρασιν :

$$\sum_{\varrho=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial p_\varrho} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial x_\varrho} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_\varrho} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial p_\varrho} \right) \qquad (k,\ \lambda = 1,\ 2, \ldots n-1)$$

ἢ δυνάμει τῆς σχέσεως (4') τάς :

---

*) P. ZERVOS : Journal de Grelle ; Bd. 143, 1913, Heft 4 p. 310.

**) Α. ΤΖΩΡΤΖΗ: Δελτίον Ἑλλην. Μαθημ. Ἑταιρ. τόμ. ΙΕ', 1934, σελ. 20.

$$\sum_{\varrho=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_\varrho}+\frac{\partial\varphi_k}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial p_\varrho}\right)\left(\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_\varrho}+\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x_\varrho}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_\varrho}+\frac{\partial\varphi_k}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x_\varrho}\right)\left(\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial p_\varrho}+\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial p_\varrho}\right)\right]$$

ἤ καὶ συντομώτερον :

$$(5'')\quad (\varphi_k,\varphi_\lambda)+\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial\sigma}(\varphi_k,\sigma)+\frac{\partial\varphi_k}{\partial\sigma}(\sigma,\varphi_\lambda)\qquad (k,\lambda=1,2,\ldots n-1).$$

Εἶναι ἀρκετὸν διὰ τὸ ζήτημά μας ἡ ἔκφρασις αὕτη (5'') νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν. Ἀλλ' ἡ πρώτη ἐκ τῶν τριῶν παρενθέσεων [1]) εἰς τὴν ταυτότητα (5'') εἶναι μηδέν, σύμφωνα μὲ τὴν ὑπόθεσιν (5)· μένει ἑπομένως νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(6)\qquad (\sigma,\varphi_k)\equiv 0\qquad (k=1,2,\ldots n-1).$$

Πρὸς τοῦτο ὑπολογίζομεν τὴν ἔκφρασιν :

$$\sum_{\varrho=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial p_\varrho}\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_\varrho}-\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_\varrho}\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_\varrho}\right).$$

Ἐὰν ἡ ἐν τῇ συναρτήσει φ_n ἐμφανιζομένη παράμετρος α, θεωρηθῇ ὡς συνάρτησίς τις τῶν x, p τότε ἡ ἀνωτέρω ἔκφρασις γίνεται :

$$(6\alpha)\qquad \sum_{\varrho=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_\varrho}\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial p_\varrho}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial p_\varrho}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\varphi_k}{\partial p_\varrho}\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_\varrho}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x_\varrho}\right)\right]\qquad (k=1,2,\ldots n-1).$$

Λαμβάνοντες εἰς τὴν θέσιν τοῦ α τὴν συνάρτησιν $\sigma(x_1, x_2,\ldots x_n, p_1, p_2,\ldots p_n)$, ἡ τελευταία αὐτὴ ἔκφρασις γίνεται ἐκ ταυτότητος ἴση μὲ τὸ μηδέν. Διότι μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ α διὰ τῆς συναρτήσεως σ(x, p) εἰς τὴν τελευταίαν τῶν (4), ἔχομεν ἐκ ταυτότητος :

$$\varphi_n(x_1,\ldots x_n, p_1,\ldots p_n, \sigma(x_1,\ldots x_n, p_1,\ldots p_n))\equiv 0$$

ὁπότε καὶ αἱ ἐκ τῆς διαδοχικῆς παραγωγίσεως ταύτης ὡς πρὸς x_ϱ καὶ p_ϱ προκύπτουσαι σχέσεις :

$$(7)\qquad \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_\varrho}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x_\varrho}\equiv 0\qquad \frac{\partial\varphi_n}{\partial p_\varrho}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial p_\varrho}\equiv 0$$

θὰ ἐπαληθεύωνται ἐκ ταυτότητος.

---

1) Εἰς τὴν ὁποίαν ἡ παράμετρος α δὲν θεωρεῖται ἀντικατασταθεῖσα ὑπὸ τῆς τιμῆς της.

Λόγῳ λοιπὸν τῶν σχέσεων (7) ἡ (6α) εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν, τὸ αὐτὸ ἑπομένως θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὴν ἐξ αὐτῆς προκύπτουσαν σχέσιν

$$(\varphi_n , \varphi_k) + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \sigma} (\sigma, \varphi_k) \equiv 0 \qquad (k=1, 2,...n-1).$$

Ἀλλ' ἡ πρώτη ἐκ τῶν παρενθέσεων τούτων, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ α δὲν ἔχει ἀντικατασταθῆ ὑπὸ τῆς τιμῆς του ἐκ τῆς (4'), δυνάμει τῆς (5) εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν, ἄρα τὸ αὐτὸ θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὴν δευτέραν ἔκφρασιν, ἤτοι

$$(\sigma, \varphi_k) \equiv 0.$$

Δυνάμει λοιπὸν τῆς ταυτότητος ταύτης καθὼς καὶ τῆς (5) ἡ σχέσις (5'') ἐπαληθεύεται καὶ ἔπεται ἡ πρότασις.

Εἶναι περιττὸν νὰ σημειώσωμεν ὅτι ἡ πρότασις αὕτη ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν εἰς τὸ δοθὲν σύστημα (4) ἐμφανίζεται καὶ ἡ ἄγνωστος συνάρτησις z. Ἀρκεῖ τότε νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τοὺς ὑπολογισμούς μας τὰς παρενθέσεις τοῦ Poisson δι' ἀγκυλῶν τοῦ Jacobi.

6. ***Ἀντίστροφος πρότασις.*** Εἶναι εὔκολον ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἀληθεύει καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις. Ἤτοι :

«Ἐὰν δοθὲν σύστημα ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως τῆς μορφῆς :

$$(8) \qquad \sigma_k (x_1, x_2,..,x_n , p_1 , p_2,...p_n) = 0 \qquad (k=1, 2,.. n-1)$$

τὸ ὁποῖον προέκυψεν ἐξ ἑνὸς ἄλλου διαφορικοῦ συστήματος n ἐξισώσεων, δι' ἀπαλοιφῆς μιᾶς αὐθαιρέτου παραμέτρου α, εἶναι ἐν ἐνελίξει, ἐὰν τουτέστιν ἐπαληθεύωνται ἐκ ταυτότητος αἱ σχέσεις :

$$(\sigma_k , \sigma_\lambda) = 0 \qquad (k, \lambda=1, 2,...k-1)$$

τότε καὶ τὸ ἀρχικὸν σύστημα εἰς τὸ ὁποῖον ἐμφανίζεται καὶ ἡ παράμετρος α, θὰ εἶναι ἐν ἐνελίξει».

Πρὸς ἀπόδειξιν τούτου παρατηροῦμεν ἁπλῶς ὅτι, σύμφωνα μὲ τὴν γενικὴν θεωρίαν τῆς ὁλοκληρώσεως συστημάτων ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως, ἀρκεῖ εἰς τὸ δοθὲν σύστημα (8) νὰ ἐπισυνάψωμεν κατὰ τὴν μέθοδον τῶν Jacobi-Mayer μίαν οἱανδήποτε νέαν συνάρτησιν τῶν $x_1 x_2,...x_n , p_1 , p_2...p_n$, α ὅπου α εἶναι αὐθαίρετός τις παράμετρος, ἡ ὁποία νὰ εἶναι ἐν ἐνελίξει μὲ ὅλας τὰς δοθείσας σχέσεις. Τὸ οὕτω σχηματιζόμενον ἐν ἐνελίξει σύστημα τῶν n ἐξισώσεων εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα ἐξ οὗ προέκυψε τὸ δοθὲν δι' ἀπαλοιφῆς τῆς παραμέτρου α.

7. Ἡ ἰδιότης αὕτη τῶν διαφορικῶν συστημάτων δύναται νὰ μᾶς

χρησιμεύση ἐν γένει εἰς τὴν μελέτην τῶν συστημάτων ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως. Καὶ εἰς τὴν ἔρευναν ὅμως τῶν λύσεων ἐξισώσεων ἢ συστημάτων τοῦ Monge διὰ τῆς μεθόδου τῶν συνδεδεμένων συστημάτων τοῦ Goursat, ὅταν διὰ διαφόρους λόγους εἶναι προτιμότερον νὰ μὴ λυθῇ τὸ ἐνδιάμεσον σύστημα ὡς πρὸς $p_1, p_2, \ldots p_n$ ἀλλὰ νὰ γίνῃ ἀπ' εὐθείας χρῆσις τῶν ἐκφράσεων τῶν παρενθέσεων (Poisson ἢ Jacobi), ἡ ἀποδειχθεῖσα πρότασις εἶναι λίαν ἐπωφελής.

Διότι ὡς γνωστόν, ἡ λύσις τῶν τοιούτων συστημάτων τοῦ Monge ἀνάγεται εἰς τὴν ἔρευναν τῶν πλήρων λύσεων τῶν συνδεδεμένων (associé) πρὸς αὐτὰ συστημάτων ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους πρώαης τάξεως, ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, εἰς τὸ νὰ εἶναι τὰ συνδεδεμένα συστήματα ἐν ἐνελίξει. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἀνωτέρω ἀποδειχθεῖσα πρότασις δὲν εἶναι μόνον ἐπαρκής, ἀλλὰ καὶ ἀναγκαία, φθάνομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι :

«Ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ἓν σύστημα τοῦ Monge λύεται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν συνδεδεμένων συστημάτων τοῦ Goursat εἶναι νὰ εὑρίσκεται ἐν ἐνελίξει τὸ ἐνδιάμεσον σύστημα, ἐξ οὗ δι' ἀπαλοιφῆς τῆς παραμέτρου α προκύπτει τὸ συνδεδεμένον».

8. ***Περὶ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως***

$$\rho_1+\rho_2\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2+\rho_3\left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)^2=\left(\frac{dx_4}{dx_1}\right)^2$$

***κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ* Goursat.**

«Δίδεται ἡ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς:

$$(9)\qquad \rho_1+\rho_2\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2+\rho_3\left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)^2=\left(\frac{dx_4}{dx_1}\right)^2$$

ὅπου τὰ ρ_1, ρ_2, ρ_3 θεωροῦνται ὡς συναρτήσεις τῶν x_1, x_2, x_3, ζητεῖται δὲ νὰ προσδιορισθῇ ἡ μορφὴ τῶν συναρτήσεων τούτων, οὕτως ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις τοῦ Monge νὰ ἔχῃ λύσιν ἐκπεφρασμένην».

Πρὸς τοῦτο ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον τοῦ Goursat. Ἐπισυνάπτομεν εἰς τὴν (9) τὰς σχέσεις :

$$(10)\qquad \frac{dx_3}{dx_1}=\varphi\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)\quad\text{καὶ}\quad\frac{dx_2}{dx_1}=\alpha$$

ὅπου φ εἶναι αὐθαίρετος συνάρτησις τῆς παραμέτρου α. Ἂν τώρα μεταξὺ τῶν σχέσεων (9), (10) καὶ τῆς

$$(11)\qquad \frac{dx^4}{dx_1}=p_1+p_2\frac{dx_2}{dx_1}+p_3\frac{dx_3}{dx_1}$$

ἀπαλείψωμεν τὰ $\frac{dx_2}{dx_1}$, $\frac{dx_4}{dx_3}$ φθάνομεν εἰς τὸ ἐνδιάμεσον σύστημα :

$$(12)\qquad \begin{aligned} F_1 &: p_1+p_2\alpha+p_3\varphi(\alpha)-U(\alpha)=0\\ F_2 &: p_2+p_3\varphi'(\alpha)-\frac{\partial U(\alpha)}{\partial\alpha}=0\\ F_3 &: p_3\,\varphi''(\alpha)-\frac{\partial^2 U(\alpha)}{\partial\alpha^2}=0 \end{aligned}$$

ὅπου ἐτέθη : $U(\alpha)=\sqrt{\varrho_1+\varrho_2\alpha^2+\varrho_3\varphi^2(\alpha)}$.

Δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ ἀπαλείψωμεν τὴν παράμετρον α μεταξὺ τῶν σχέσεων (12), διὰ νὰ ἴδωμεν ἐὰν τὸ συνδεδεμένον σύστημα τοῦ συστήματος τῶν σχέσεων (9), (10), (11) εἶναι ἐν ἐνελίξει. Ὡς ἀποδεικνύομεν ἀνωτέρω [1]), ἀρκεῖ τὸ (12) νὰ εἶναι ἐν ἐνελίξει, τῆς α θεωρουμένης ὡς σταθερᾶς, ἵνα καὶ τὸ συνδεδεμένον εἶναι ἐν ἐνελίξει.

Ὑπολογίζομεν λοιπὸν τὰς παρενθέσεις :

$$(13)\qquad \left(F_k,F_\lambda\right)=\sum_{\mu=1}^{3}\left(\frac{\partial F_k}{\partial p_\mu}\frac{\partial F_\lambda}{\partial x_\mu}-\frac{\partial F_k}{\partial x_\mu}\frac{\partial F_\lambda}{\partial p_\mu}\right)\qquad (k,\lambda=1,2,3)$$

καὶ λαμβάνομεν:

$$(14)\qquad \begin{aligned} &-\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x_1}-\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x_2}+\frac{\partial U}{\partial x_2}-\varphi\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x_3}+\varphi'\frac{\partial U}{\partial x_3}=0\\ &-\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2\partial x_1}-\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2\partial x_2}-\varphi\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2\partial x_3}+\varphi''\frac{\partial U}{\partial x_3}=0\\ &-\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2\partial x_1}-\varphi'\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2\partial x_2}+\varphi''\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x_3}=0. \end{aligned}$$

Ποριζόμεθα οὕτω ἐκφράσεις μεταξὺ τῶν ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, α, $\varphi(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, $\varphi''(\alpha)$ καὶ τῶν παραγώγων τῶν ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ὡς πρὸς x_1, x_2, x_3.

Διὰ νὰ εἶναι τὸ σύστημα (12) ἐν ἐνελίξει πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ σχέσεις αὗται (14) νὰ εἶναι ταυτότητες ὡς πρὸς α, x_1, x_2, x_3.

Πρὸς τοῦτο ἐκφράζομεν ὅτι μία ἐξ αὐτῶν εἶναι ταυτότης ὡς πρὸς α, $\varphi(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$,... Ἐκ ταύτης προσδιορίζομεν τὰ ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 καὶ ζητοῦμεν ὥστε ταῦτα νὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὰς ἄλλας δύο. Προτιμῶμεν δὲ τὴν πρώτην, ἐπειδὴ στερεῖται παραγώγων τρίτης τάξεως.

Λαμβάνομεν λοιπὸν τὴν:

---

1) Βλ. ἀνωτ. σελ. 6.

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x_1}-\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x_2}+\frac{\partial U}{\partial x_2}-\varphi\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x_3}+\varphi'\frac{\partial U}{\partial x_3}=0,$$

ἡ ὁποία γράφεται καί :

$$(15)\quad -\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x_1}-\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x_2}+\frac{U^2}{U^2}\frac{\partial U}{\partial x_2}-\varphi\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x_3}+\varphi'\frac{U^2}{U^2}\frac{\partial U}{\partial x_3}=0.$$

Λέγομεν ὅτι, διὰ νὰ ἐπαληθεύεται αὕτη, πρέπει τὰ ρ_1, ρ_2, ρ_3 νὰ εἶναι ἀνεξάρτητα τῶν x_1, x_2, x_3. Πράγματι, διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ταυτότης ὡς πρὸς α, φ(α)... πρέπει νὰ ἐξισώσωμεν μὲ τὸ μηδὲν τοὺς συντελεστὰς τῶν ὁμοίων ὅρων ὡς πρὸς α, φ(α),...

Ἀλλὰ λόγῳ τῶν τύπων :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x}=\frac{2\left(\alpha\frac{\partial\rho_2}{\partial x}+\varphi\varphi'\frac{\partial\rho_3}{\partial x}\right)\left(\rho_1+\rho_2\alpha^2+\rho_3\varphi^2\right)}{2U^3}-$$

$$-\frac{\left(\alpha\rho_2+\varphi\varphi'\rho_3\right)\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\alpha^2\frac{\partial\rho_2}{\partial x}+\varphi^2\frac{\partial\rho_3}{\partial x}\right)}{2U^3}$$

$$-\frac{U^2\partial U}{U^2\partial x}=\frac{\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\alpha^2\frac{\partial\rho_2}{\partial x}+\varphi^2\frac{\partial\rho_3}{\partial x}\right)\left(\rho_1+\rho_2\alpha^2+\rho_3\varphi^2\right)}{2U^3}$$

ὁ συντελεστὴς τοῦ α^2 ἐν τῇ (15) εἶναι $\rho_2\frac{\partial\rho_2}{\partial x_1}$ καὶ ἐπειδὴ δὲν εἶναι $\rho_2=0$, θὰ ἔχωμεν $\frac{\partial\rho_2}{\partial x_1}=0$ ἤτοι $\rho_2=\omega_2(x_2, x_3)$. Ἐπίσης ὁ συντελεστὴς $\varphi^2\varphi'$ τοῦ $\rho_3\frac{\partial\rho_3}{\partial x_1}$ μᾶς δίδει $\rho_3=\omega_3(x_2, x_3)$ Ἐξισώνοντες μὲ τὸ μηδὲν τοὺς ὅρους τοὺς ἔχοντας συντελεστὴν α, ἔχομεν :

$$\rho_2\frac{\partial\rho_1}{\partial x_1}-2\rho_1\frac{\partial\rho_2}{\partial x_1}=0.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\rho_2=\omega_2(x_2, x_3)$, ἕπεται ὅτι $\frac{\partial\rho_1}{\partial x_1}=0$ δηλαδὴ καὶ $\rho_1=\omega_2(x_2, x_3)$.

Ἤτοι οἱ τρεῖς συντελεσταὶ ρ_1, ρ_2, ρ_3 δὲν περιέχουν τὸ x_1.

Καθ' ὅμοιον τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι οὗτοι εἶναι ἀνεξάρτητοι καὶ τοῦ x_2. Πράγματι. Τὸ $\rho_3=\omega_3(x_3)$ διότι ὁ συντελεστὴς $\alpha\varphi^2\varphi'$ τοῦ $\rho_3\frac{\partial\rho_3}{\partial x_2}$

μᾶς δίδει $\frac{\partial \varrho_3}{\partial x_2}=0$, ἤτοι $\varrho_3=\omega_3(x_3)$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τοῦ συντελεστοῦ $\varphi^2\alpha^2$

$$2\varrho_2\frac{\partial \varrho_3}{\partial x_2}-\varrho_3\frac{\partial \varrho_2}{\partial x_2}=0 \qquad \text{καὶ} \qquad \varrho_3=\omega_3(x_3)$$

ἕπεται ὅτι $\varrho_2=\omega_2(x_3)$. Ἐκ τῆς σχέσεως δὲ τῆς προκυπτούσης ἐκ τοῦ συντελεστοῦ α^2 δηλαδὴ τῆς:

$$2\varrho_2\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_2}-\varrho_1\frac{\partial \varrho_2}{\partial x_2}=0, \qquad \text{ἐπειδὴ } \varrho_2=\omega_2(x_3),$$

ἕπεται ὅτι καὶ $\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_2}=0$ ἤτοι $\varrho_1=\omega_1(x_3)$.

Ἀποδεικνύεται τέλος ὅτι τὰ ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 εἶναι ἀνεξάρτητα καὶ τοῦ x_3. Πράγματι. Ἐκ τοῦ συντελεστοῦ φ' τοῦ $\varrho_1\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_3}$, ἐπειδὴ ὑποτίθεται ὅτι $\varrho_1\neq 0$ ἔχομεν ὅτι $\varrho_1=c_1$ σταθερόν. Ὁμοίως ἐκ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ $\varrho_1\frac{\partial \varrho_2}{\partial x_3}$ δηλαδὴ τοῦ $\alpha^2\varphi'$ ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$\varrho_2\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_3}+\varrho_1\frac{\partial \varrho_2}{\partial x_3}=0, \qquad \text{ἐπειδὴ δὲ } \varrho_1=c_1$$

ἕπεται ὅτι $\varrho_2=c_2$. Τέλος δὲ ἐκ τοῦ συντελεστοῦ $\varphi^2\varphi'$ συνάγομεν ὅτι:

$$2\varrho_3\frac{\partial \varrho_1}{\partial x_3}-\varrho_1\frac{\partial \varrho_3}{\partial x_3}=0.$$

Ἐκ ταύτης δέ, ἐπειδὴ $\varrho_1=c_1$, προκύπτει ὅτι $\varrho_3=c_3$.

Ἑπομένως τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (14) δὲν δύναται νὰ εἶναι ἐν ἐνελίξει, εἰ μὴ μόνον ὅταν τὰ ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 εἶναι ἀνεξάρτητα τῶν x_1, x_2, x_3.

Ὅθεν συνάγομεν τὸ ἑξῆς συμπέρασμα:

«Ἡ μέθοδος τοῦ Goursat τῶν συνδεδεμένων (associé) συστημάτων δὲν ἐφαρμόζεται εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ Monge μορφῆς

$$\varrho_1+\varrho_2\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2+\varrho_3\left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)^2=\left(\frac{dx_4}{dx_1}\right)^2$$

ὅταν τὰ ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 ὑποτεθοῦν ὡς συναρτήσεις τῶν x_1, x_2, x_3 καὶ ὅταν εἰς τὸ συνημμένον τῇ ἐξισώσει σύστημα τοῦ Monge δὲν ἐμφανίζονται αἱ αὐταὶ μεταβληταί. Ἡ μόνη περίπτωσις καθ' ἣν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει λύσιν ἐκπεφρασμένην κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Goursat εἶναι, ὅταν οἱ συντελεσταὶ $\varrho_1,\varrho_2,\varrho_3$ θεωρηθοῦν ὡς ποσότητες σταθεραί».

9. ***Γενίκευσις: Περίπτωσις n+1 μεταβλητῶν.***

Ἔστω ἤδη ὅτι μᾶς δίδεται ἡ γενικὴ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς

$$(16)\qquad \rho_1+\rho_2\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2+\ldots+\rho_n\left(\frac{dx_n}{dx_1}\right)^2=\left(\frac{dx_{n+1}}{dx_1}\right)^2$$

ὅπου τὰ ρ_i $(i=1, 2,\ldots n)$ θεωροῦνται ὡς συναρτήσεις τῶν x_i .

Ζητοῦμεν πάλιν νὰ προσδιορίσωμεν τὰς συναρτήσεις ταύτας ρ_i , οὕτως ὥστε ἡ δοθεῖσα διαφορικὴ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς τοῦ Monge νὰ λύεται διὰ τῆς μεθόδου τῶν συνδεδεμένων (associé) συστημάτων τοῦ Goursat.

Εἰς τὴν (16) ἐπισυνάπτομεν n—1 σχέσεις τῆς μορφῆς

$$(16')\qquad \frac{dx_\lambda}{dx_1}=\varphi_\lambda\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right),\quad \frac{dx_2}{dx_1}=\alpha\qquad(\lambda=3,\ 4,\ldots n)$$

ὅπου αἱ φ_λ εἶναι αὐθαίρετοι συναρτήσεις τῆς παραμέτρου α.

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει καὶ τὴν

$$(17)\qquad dx_{n+1}=p_1\,dx_1+p_2\,dx_2+\ldots+p_n\,dx_n$$

ἐπιτυγχάνομεν τὸ ἐνδιάμεσον διαφορικὸν σύστημα :

$$F_o : p_1+p_2\alpha+\sum_{\mu=3}^{n} p_\mu\varphi_\mu-U=0$$

$$(18)\qquad F_1 : p_2+\sum_{\mu=3}^{n} p_\mu\varphi'_\mu-U'=0$$

$$F_\nu : \sum_{\mu=3}^{n} p_\mu\varphi_\mu^{(\nu)}-U^{(\nu)}=0\qquad\left(\nu=2,3,\ldots,n-1\right)$$

ὅπου ἐτέθη $U=\sqrt{\rho_1+\rho_2\alpha^2+\ldots\rho_n\varphi_n^2}$

καὶ $$\varphi_\mu^{(\nu)}=\frac{\partial^{(\nu)}\varphi_\mu}{\partial\alpha^\nu},\quad U^{(\nu)}=\frac{\partial^{(\nu)}U}{\partial\alpha^\nu}.$$

Ἵνα τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (16), (16'), (17) τοῦ Monge ἔχῃ λύσιν ἐκπεφρασμένην κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Goursat ἀρκεῖ ὅλαι αἱ παρενθέσεις αἱ σχηματιζόμεναι ἀπὸ τὰς ἐκφράσεις F_o , F_1 , F_ν τοῦ συστήματος (18) νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὰς σχέσεις :

$$(19)\qquad (F_o\ ,\ F_1\ )=0,\ \ (F_o\ F_{\nu_1})=0,\ (F_1\ ,\ F_{\nu_1})=0,$$
$$(F_{\nu_1},\ F_{\nu_2})=0\qquad(\nu_1,\ \nu_2=2,\ 3,\ldots n-1)$$

αἵτινες λόγῳ τῶν :

$$\frac{\partial F_0}{\partial p_1}=\frac{\partial F_1}{\partial p_2}=1,\ \frac{\partial F_1}{\partial p_1}=\frac{\partial F_\nu}{\partial p_1}=\frac{\partial F_\nu}{\partial p_2}=0 \quad (\nu=2,\ 3,..\ n-1)$$

γίνονται :

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x_1}-\alpha\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x_2}+\frac{\partial U}{\partial x_2}+\sum_{\mu=3}^{n}\left(-\varphi_\mu\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x_\mu}+\varphi'_\mu\frac{\partial U}{\partial x_\mu}\right)=0$$

$$(20)\quad -\frac{\partial^{(\nu_1+1)}U}{\partial\alpha^{\nu_1}\partial x_1}-\alpha\frac{\partial^{(\nu_1+1)}U}{\partial\alpha^{\nu_1}\partial x_2}+\sum_{\mu=3}^{n}\left(-\varphi_\mu\frac{\partial^{(\nu_1+1)}U}{\partial\alpha^{\nu_1}\partial x_\mu}+\varphi_\mu^{(\nu_1)}\frac{\partial U}{\partial x_\mu}\right)=0$$

$$-\frac{\partial^{(\nu_1+1)}U}{\partial\alpha^{\nu_1}\partial x_2}+\sum_{\mu=3}^{n}\left(-\varphi'_\mu\frac{\partial^{(\nu_1+1)}U}{\partial\alpha^{\nu_1}\partial x_\mu}+\varphi_\mu^{(\nu_1)}\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x_\mu}\right)=0$$

$$\sum_{\mu=3}^{n}\left(-\varphi_\mu^{(\nu_1)}\frac{\partial^{(\nu_2+1)}U}{\partial\alpha^{\nu_2}\partial x_\mu}+\varphi_\mu^{(\nu_2)}\frac{\partial^{(\nu_1+1)}U}{\partial\alpha^{\nu_1}\partial x_\mu}\right)=0 \quad (\nu_1,\ \nu_2=2,\ 3,\ldots n-1)$$

καὶ αἱ ὁποῖαι ἐκφράζουν τὴν ἱκανὴν καὶ ἀναγκαίαν συνθήκην ἵνα ἡ ἐξίσωσις (16) τοῦ Monge ἔχῃ λύσιν ἐκπεφρασμένην κατὰ τὴν μέθοδον τῶν συνδεδεμένων συστημάτων τοῦ Goursat, ὅταν τὸ συνημμένον εἰς τὴν (16) σύστημα εἶναι τῆς μορφῆς (16′).

Αἱ ἐξισώσεις αὗται, προφανῶς, εἶναι ἐκφράσεις τῶν α, $\varphi_\mu(\alpha)$, $\varphi'_\mu(\alpha)$, $\varphi''_\mu(\alpha)$,...καὶ τῶν παραγώγων τῶν ρ_i $(i=1,\ 2,\ldots n)$ ὡς πρὸς x_i , διὰ νὰ εἶναι δὲ τὸ σύστημα (18) ἐν ἐνελίξει πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ σχέσεις (20) νὰ εἶναι ταυτότητες ὡς πρὸς α καὶ x_i . Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν τὰ ρ_i διὰ τοιούτων συναρτήσεων τῶν x_i ὥστε νὰ πληροῦνται αἱ συνθῆκαι (20), ἀρκεῖ εἰς ταύτας νὰ ἐξισώσωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν ὁμοίων ὅρων ὡς πρὸς α, $\varphi_\mu(\alpha)$,...καὶ νὰ λύσωμεν τὸ προκῦπτον σύστημα.

Λέγομεν ὅτι τὸ σύστημα (20) ἐπαληθεύεται μόνον ὅταν τὰ ρ_i εἶναι ποσότητες σταθεραί. Πράγματι. Ἐὰν λάβωμεν τὴν πρώτην τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος τούτου καὶ ἀντικαταστήσωμεν τὰς τιμὰς τῶν

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial x}=\frac{2\left(\alpha\frac{\partial\rho_2}{\partial x}+\sum_{\mu=3}^{n}\varphi_\mu\varphi'_\mu\frac{\partial\rho_\mu}{\partial x}\right)\left(\rho_1+\rho_2\alpha^2+\sum_{\mu=3}^{n}\rho_\mu\varphi_\mu^2\right)}{2U^3}-$$

$$-\frac{\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial x}+\alpha^2\frac{\partial\rho_2}{\partial x}+\sum_{\mu=3}^{n}\varphi_\mu^2\frac{\partial\rho_\mu}{\partial x}\right)\left(\rho_2\alpha+\sum_{\mu=3}^{n}\rho_\mu\varphi_\mu\varphi'_\mu\right)}{2U^3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \alpha^2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} + \sum_{\mu=3}^{n} \varphi_\mu^2 \frac{\partial \rho_\mu}{\partial x}}{2U}$$

προσέτι δέ, ἐὰν ἀπαλείψωμεν εἰς αὐτὴν τοὺς παρονομαστάς, θὰ φθάσωμεν εἰς μίαν ἔκφρασιν ἀνάλογον πρὸς τὴν (15).

Ἡ ἀπόδειξις πλέον εἶναι εὔκολος, διότι ὁ συντελεστὴς π. χ. α^3 τοῦ $\rho_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1}$ μᾶς δίδει $\rho_2 = \omega_2(x_2, x_3, \ldots x_n)$. Ἐκ τοῦ συντελεστοῦ δὲ $\varphi^3_\lambda \varphi'_\lambda$ $(\lambda = 3, 4, \ldots n)$ τοῦ $\rho_\lambda \frac{\partial \rho_\lambda}{\partial x_1}$ λαμβάνομεν $\rho_\lambda = \omega_\lambda (x_2, x_3, \ldots x_n)$. Τέλος ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\rho_2 \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} - 2\rho_1 \frac{\partial \rho_2}{\partial x_1} = 0$$

ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῶν ὅρων τῶν ἐχόντων συντελεστὴν α, ἐπειδὴ ἔχομεν $\rho_2 = \omega_2 (x_2, x_3, \ldots x_n)$, συνάγομεν ὅτι $\rho_1 = \omega_1 (x_2, x_3, \ldots x_n)$.

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τὰ ρ_i εἶναι ἀνεξάρτητα τοῦ x_1.

Ἐργαζόμενοι κατὰ τρόπον ἀνάλογον πρὸς ἐκεῖνον τὸν ὁποῖον ἠκολουθήσαμεν διὰ τὴν ἐξίσωσιν (15), ἀρκεῖ μόνον νὰ θέσωμεν εἰς τὰ ρ, φ, x, ἀντὶ τοῦ δείκτου 3 τὸν δείκτην μ $(\mu = 3, 4, \ldots n)$ φθάνομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι διὰ νὰ ἐπαληθεύεται ἐκ ταυτότητος τὸ σύστημα (20) πρέπει τὰ ρ_i νὰ εἶναι σταθεραὶ ποσότητες.

Ἐπειδὴ δέ, διὰ νὰ ἔχῃ λύσιν ἐκπεφρασμένην ἡ ἐξίσωσις (16) αἱ συνθῆκαι (20) δὲν εἶναι μόνον ἐπαρκεῖς, ἀλλὰ καὶ ἀναγκαῖαι, συνάγομεν τὸ ἀκόλουθον γενικὸν συμπέρασμα :

«Αἱ ἐξισώσεις τοῦ Monge τῆς μορφῆς

$$\rho_1 + \rho_2 \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 + \rho_3 \left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)^2 + \ldots + \rho_n \left(\frac{dx_n}{dx_1}\right)^2 = \left(\frac{dx_{n+1}}{dx_1}\right)^2$$

δὲν λύονται διὰ τῆς μεθόδου τῶν συνδεδεμένων συστημάτων τοῦ Goursat, ὅταν τὰ $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ ὑποτεθοῦν συναρτήσεις τῶν x_i καὶ ὅταν εἰς τὸ συνημμένον εἰς αὐτὴν σύστημα τοῦ Monge, δὲν ἐμφανίζονται αἱ αὐταὶ μεταβληταὶ x_i. Ἡ μόνη περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἔχει λύσιν ἐκπεφρασμένην, κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ Goursat, εἶναι, ὅταν οἱ συντελεσταὶ ρ_i ὑποτεθοῦν ὡς ποσότητες σταθεραί».

Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ζητοῦμεν νὰ ἐκφράσωμεν τὰ ρ_i διὰ τοιούτων συναρτήσεων εἰς τὰς ὁποίας νὰ περιλαμβάνεται καὶ

ἡ ἄγνωστος συνάρτησις, δηλαδὴ ἡ x_{n+1}, καταλήγομεν εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα ἀρκεῖ μόνον, ἀντὶ τῶν παρενθέσεων τοῦ Poisson νὰ χρησιμοποιήσωμεν εἰς τοὺς ὑπολογισμούς μας τὰς ἀγκύλας τοῦ Jacobi.

10. ***Σύγκρισις τῶν ἀνωτέρω ἐξαγομένων μὲ μίαν νέαν κατηγορίαν ἐξισώσεων τοῦ* Monge.** Τελευταίως ὁ Goursat*) ἐμελέτησε μίαν νέαν κατηγορίαν ἐξισώσεων τοῦ Monge, αἵτινες ὁρίζουν τὰς ἰδιαζούσας πολλαπλότητας, ἐν σχέσει μὲ τὸ πρόβλημα τοῦ Cauchy, ἑνὸς ἐν ἐνελίξει συστήματος ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως. Αἱ τοιαῦται ἐξισώσεις δέχονται πάντοτε λύσιν ἐκπεφρασμένην.

Ἂς ζητήσωμεν νὰ ἴδωμεν μήπως ἡ ἐξίσωσις (16) ἀνήκει εἰς τὴν τὴν νέαν ταύτην κατηγορίαν τῶν ἐξισώσεων Monge. Ἵνα ἡ ἐξίσωσις (16) τοῦ Monge, ὁρίζῃ τὰς ἰδιαζούσας πολλαπλότητας τοῦ ἐν ἐνελίξει ὑποτιθεμένου συστήματος τῶν $n-1$ ἐξισώσεων μὲ μερικὰς παραγώγους πρώτης τάξεως τῆς μορφῆς :

$$q_k = F_k(x_1 , x_2,\ldots x_n , x_{n+1}, q_1) \qquad (k=2, 3,\ldots n)$$

ὅπου τὰ $x_1 , x_2,\ldots,x_n$ εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταὶ καὶ x_{n+1} μία ἄγνωστος συνάρτησις αὐτῶν, ἐτέθη δὲ

$$q_i = \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_i} \qquad (i=1, 2, 3,\ldots n)$$

ἀνάγκη ὅπως, αἱ n σχέσεις :

$$\frac{\partial U}{\partial p_1},\ldots,\frac{\partial U}{\partial p_k}, \quad U-\sum\frac{\partial U}{\partial p_k}p_k \qquad (k=2, 3,\ldots n)$$

εἶναι συναρτήσεις μιᾶς ἐξ αὐτῶν, ὅταν τὰ $x_1 , x_2,\ldots x_{n+1}$ θεωρηθοῦν ὡς σταθερά, ἢ ὅπερ τό αὐτό, ὅλαι αἱ ἐλάσσονες μὲ δύο γραμμὰς καὶ μὲ δύο στήλας, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἀπὸ τὴν ὁρίζουσαν τοῦ Hesse:

---

*) Sur quelques équations de Monge intégrables explicitement, (An. d. R. Scuola Sup. Pisa, Vol. I. 1932 – X).

$$H=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial p_2^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial p_2 \partial p_3} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial p_2 \partial p_{n-1}} & \frac{\partial^2 U}{\partial p_2 \partial p_n} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial p_2 \partial p_3} & \frac{\partial^2 U}{\partial p_3^2} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial p_3 \partial p_{n-1}} & \frac{\partial^2 U}{\partial p_3 \partial p_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 U}{\partial p_2 \partial p_{n-1}} & \frac{\partial^2 U}{\partial p_3 \partial p_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial p_{n-1}^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial p_{n-1} \partial p_n} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial p_2 \partial p_n} & \frac{\partial^2 U}{\partial p_3 \partial p_n} & \cdots & \frac{\partial^2 U}{\partial p_{n-1} \partial p_n} & \frac{\partial^2 U}{\partial p_n^2} \end{vmatrix}$$

νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσαι μὲ τὸ μηδέν, ἔνθα ἐτέθη

$$(21) \qquad p_{k_1} = \frac{dx_{k_1}}{dx_1} \qquad (k_1 = 2, 3, .., n+1)$$

$$U = p_{n+1} = \sqrt{\varrho_1 + \varrho_2 p_2^2 + \ldots + \varrho_n p_n^2}\,.$$

Ἀλλ' ἡ συνθήκη αὕτη δὲν ἐπαληθεύεται δι' οἱαδήποτε ϱ_1 , $\varrho_2, \ldots \ldots \varrho_n$. Πράγματι : ἂς ὑπολογίσωμεν μίαν ἐλάσσονα μὲ δύο γραμμὰς καὶ μὲ δύο στήλας, ἡ ὁποία ἐξάγεται ἀπὸ τὴν ὁρίζουσαν τοῦ Hesse π. χ. τήν :

$$H_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial p_{n-1}^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial p_{n-1} \partial p_n} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial p_{n-1} \partial p_n} & \frac{\partial^2 U}{\partial p_n^2} \end{vmatrix}$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰς τιμὰς τῶν ὅρων αὐτῆς, ὅπως ἐξάγωνται ἐκ τῆς (21) φθάνομεν εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι διὰ νὰ εἶναι ἡ τιμὴ αὐτῆς ἐκ ταυτότητος μηδέν, πρέπει

$$U^2 - (\varrho_{n-1} p_{n-1}^2 + \varrho_n p_n^2) \equiv 0$$

ἢ καὶ $$\varrho_1 + \varrho_2 p_2^2 + \varrho_3 p_3^2 + \ldots \varrho_{n-2} p_{n-2}^2 \equiv 0$$

πρᾶγμα τὸ ὁποῖον δύναται νὰ συμβαίνῃ μόνον ὅταν τὰ $\varrho_1 . \varrho_2, \ldots \varrho_{n-2}$ εἶναι μηδέν, ὅτε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (16) δὲν ἀνήκει εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν ὡς ἄνω ἐξισώσεων τοῦ Monge.

Περαίνων τὴν παροῦσαν ἐργασίαν, αἰσθάνομαι τὴν ὑποχρέωσιν νὰ ἐκφράσω τὰς εὐγνώμονας εὐχαριστίας μου πρὸς τοὺς σεβαστούς μου κ. κ. καθηγητὰς τοῦ Μαθηματικοῦ Τμήματος τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν διὰ τὰς προσπαθείας των, ὅπως μὲ καθοδηγήσουν εἰς τὰ ἁρμονικὰ καὶ ἐκτεταμένα πεδία τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.

Ἰδιαιτέρως εὐχαριστῶ τὸν καθηγητὴν κ. Π. Ζερβὸν καὶ τὸν ὑφηγητὴν κ. Α. Τζώρτζην, τῶν ὁποίων παρηκολούθησα τὰ ἀνώτερα φροντιστήρια ἐπὶ θεμάτων ἀναφερομένων εἰς τὴν θεωρίαν τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων καί ἐπὶ τοῦ προβλήματος τοῦ Monge, καὶ ἐκ τῶν ὁποίων καθωδηγήθην διὰ τὴν σύνταξιν τῆς παρούσης διατριβῆς.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Engel F. Neue Methode i. d. Invariantentheorie d. Differentialgleichungen, Math-Phys. Klasse 1905.

Engel—Faber : Die Lie'sche Theorie d. partiellen Differentialgleichungen I. O. Budapest 1932.

Goursat É. Vorlesungen über die Integration d. partiellen Differentialgleichungen I. O. Deutsche Ausgabe.

» Sur le problème de Monge (Bul. Soc. Math. T. 33 1905 p. 201).

» Sur quelques équations de Monge intégrables explicitement (An. d. R. Sc. Norm. di Pisa, Vol. I 1932—X).

Hocheisel G. Partiellen Differentialgleichungen, Sam. Göschen, Berlin 1928.

Lie—Scheffers: Geometrie der Berührungstransformationen, Bd. I. Leipzig 1896.

Mansion P. Theorie d. partiellen Differentialgleichungen I. O. Berlin 1892.

Zervos P. Sur une méthode de M. Goursat dans le proplème de Monge (C. R. Acad. Sc. 25 Mai 1908).

» Sur integrations de certains système indeterminés d'équations differentielles (Journal für reine und angew. Math. t. 143, 1913 p. 300-312).

» Le problème de Monge (Mém. Sc. Math. Fasc. LIII. Paris 1932).

Ρεμούνδου Γ. Διαφορικαὶ Ἐξισώσεις τόμ. I. καὶ II.

Τζώρτζη Α. Περὶ τῆς ὁλοκληρώσεως μιᾶς τάξεως ἐξισώσεων τοῦ Monge καὶ περὶ τῶν χαρακτηριστικῶν τοῦ Beudon διαφόρων τάξεων μιᾶς ἐξισώσεως μὲ μερικὰς παραγώγους τρίτης τάξεως μὲ n ἀνεξαρτήτους μεταβλητάς. (Δελτίον Ἑλλην. Μαθ. Ἑταιρείας Τόμ. ΙΕ' Ἀθῆναι 1934).