ΣΥΜΒΟΛΗ
ΕΙΣ
ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΩΝ ΑΝΩΜΑΛΙΩΝ
ΤΩΝ
ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

Ἐναίσιμος διατριβὴ ἐπὶ διδακτορίᾳ

ὑπὸ

ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΞΑΝΘΑΚΗ

Ἀριστούχου πτυχιούχου τῶν μαθηματικῶν

ΑΘΗΝΑΙ ΜΑΡΤΙΟΣ 1930

ΣΥΜΒΟΛΗ

ΕΙΣ

ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑΝ ΤΩΝ ΑΝΩΜΑΛΙΩΝ

ΤΩΝ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ "ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ"

ΕΝΑΙΣΙΜΟΣ

ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΕΠΙ ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΑι

ΥΠΟ

ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΞΑΝΘΑΚΗ

ΑΡΙΣΤΟΥΧΟΥ ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ ΜΑΡΤΙΟΣ 1930

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Πολλαί είναι αί κατευθύνσεις καθ' ἅς ἔχει μελετηθῆ τό ζήτημα τῆς ὁλοκληρώσεως τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \sigma(x,y)$$

Ὅπως ἐπίσης πολλά εἶναι καί τά ζητήματα τά γεννώμενα ἀπό τάς διαφόρους ὑποθέσεις ἅς δυνάμεθα νά κάμωμεν διά τήν συνάρτησιν $\sigma(x,y)$.

Ἐζήτησαν κατ' ἀρχάς νά λύσουν ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (1) μετασχηματίζοντες αὐτάς εἰς ἄλλας λυομένας διά τετραγωνισμῶν (1).

Τοῦτο ὅμως κατορθοῦται ὡς γνωστόν εἰς πολύ ὀλίγας περιπτώσεις. Ὁ Cauchy πρῶτος ἔθεσε ἄλλως τό ζήτημα, περιορίσας τό ζητούμενον καί ἔδωκε τήν περίφημον μέθοδον τοῦ Λογισμοῦ τῶν ὁρίων. Οὗτος ἀντί νά ζητήσῃ ἰδιότητας τῶν ὁλοκληρωμάτων τῆς διαφ. ἐξισώσεως (1) ἰσχυούσας διά πᾶσαν τιμήν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ἐζήτησεν ἰδιότητας τῶν ὁλοκληρωμάτων τῆς (1) ἰσχυούσας μόνον εἰς τήν περιοχήν δεδομένου σημείου καί λεπτομερέστερον ἐζήτησε νά διακρίνῃ ἐάν, δοθέντος συστήματος τιμῶν (x_0, y_0) ὑπάρχῃ σειρά τῆς μορφῆς:

---

(1) Ἴδε Ἀνάλυσιν Γ. Ρεμούνδου καί "Ἀπειροστικόν Λογισμόν" κ. Π. Ζερβοῦ.

(2) $\qquad y - y_0 = A(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \dots$

συγκλίνουσα εἰς τήν περιοχήν τοῦ x_0 καί επαληθεύουσα τήν (1). Ἀπέδειξε δέ ὅτι ἐάν ἡ $\sigma(x.y)$ εἶναι συνάρτησις ὁλόμορφος εἰς τήν περιοχήν τοῦ $(x_0 . y_0)$ ἡ (1) δέχεται ἕν καί μόνον ὁλοκλήρωμα ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ x_0, τό ὁποῖον διά $x=x_0$ λαμβάνει τήν τιμήν $y=y_0$ καί ἔχομεν ὁλοκλήρωμα τό ὁποῖον ἀναπτύσσεται εἰς τήν σειράν τοῦ Taylor κατά τάς αὐξούσας δυνάμεις τοῦ $(x-x_0)^2$ (1). Παρατηροῦμεν δηλαδή ὅτι ἡ οὕτως εὑρισκομένη σειρά, εἴμεθα βέβαιοι ὅτι δίδει ὁλοκλήρωμα τῆς διαφ. ἐξισώσεως (2) μόνον ὅταν περιορισθῶμεν εἰς τήν περιοχήν τοῦ σημείου $x=x_0$. ἤτοι ἔχει τοπικόν οὕτως εἰπεῖν χαρακτῆρα ἡ λύσις αὕτη..

Ἄλλη κατεύθυνσις προκύψασα ἐκ τῆς μελέτης τοῦ θεωρήματος τῆς ὑπάρξεως τοῦ Cauchy εἶναι ἡ δεδομένη ὑπό τοῦ ἑξῆς ζητήματος: (3) " τί συμβαίνει ὅταν δέν ἰσχύει ἡ ὑπόθεσις ὅτι ἡ $\sigma(x.y)$ εἶναι συνάρτησις ὁλόμορφος ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ $(x_0 . y_0)$; ἤ καί τί συμβαίνει ὅταν εἰς τό σημεῖον (x_0, y_0) ἤ εἰς τό $x=0$, $y=0$ εἰδικώτερον, δέν εἶναι ἐφαρμόσιμον τό θεώρημα τοῦ Cauchy;" Ὅπως π.χ. ὅταν διά $x=0$. $y=0$ ἡ $\sigma(x.y)$ λαμβάνει τήν ἀπροσδιόριστον μορφήν $\frac{0}{0}$

(2) "Ἰδ. Γ. Ρεμούνδου. " Στοιχεῖα τῆς θεωρίας τῶν διαφ. ἐξισώσεων." Τ. Ιος. σελ. 71.

(3) "Ἰδ. P. Boutroux "Leçons sur les fonctions definies par les équations différentielles du premier ordre" "Introduction.

Τοιοῦτον πρόβλημα ἐμελέτησαν οἱ Briot et Bouquet ἀκολουθοῦντες τάς μεθόδους τοῦ Cauchy καί Weierstrass.

Ἐζήτησαν δηλαδή νά εὕρουν ἐάν εἰς τήν περίπτωσιν $\sigma(0,0)=\frac{0}{0}$ ὑπάρχουν ὁλοκληρώματα ὁλόμορφα τά ὁποῖα διά $x=0$ λαμβάνουν τήν τιμήν $y=0$ καί συνάμα νά παραστήσωσι ταῦτα μέ σειράς δυνάμεων μιᾶς ἤ δύο μεταβλητῶν (συναρτήσεων μιᾶς καί τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς) δηλαδή μέ σειράς τῆς μορφῆς:

$$a_0+a_1\varphi+a_2\varphi^2+\dots$$

$$\cdot+\beta_1\omega+\beta_2\omega^2+\dots$$

ἔνθα φ καί ω συναρτήσεις τοῦ x.

Τό γενικόν ζήτημα εἶναι προφανῶς τό ἑξῆς: "Πῶς ἀπό ἰδιότητας τῆς συναρτήσεως $\sigma(x.y)$ ἐξάγονται γνωρίσματα διά τό ὁλοκλήρωμα τῆς διαφ. ἐξισώσεως (1) καί μάλιστα πῶς ἀπό τά ἰδιάζοντα σημεῖα τῆς $\sigma(x.y)$ εὑρίσκονται ἰδιάζονται σημεῖα τοῦ ὁλοκληρώματος; Ἀλλά τοῦτο ὑποδιαιρεῖται εἰς πλῆθύν ζητημάτων ἡ μελέτη τῶν ὁποίων ἔδωσε ἐνδιαφέροντα ἀποτελέσματα. Οὕτω, ἔστω ὅτι ἡ $\sigma(x.y)$ εἶναι ρητή συνάρτησις ὡς πρός y καί αλγεβρική ὡς πρός x. Δυνατόν ἡ ἐξίσωσις (1) νά εἶναι τοιαύτη ὥστε τά ἰδιάζοντα ὑπερβατικά σημεῖα τοῦ ὁλοκληρώματος, ἐάν ὑπάρχουν, νά εἶναι ἀνεξάρτητα τῆς τιμῆς y_0 τήν ὁποίαν θέλομεν νά λαμβάνη τοῦτο εἰς τό ἀρχικόν σημεῖον x_0 δηλαδή πάντα τά ὁλοκληρώματα τά ἀντιστοιχοῦντα εἰς τάς διαφόρους τιμάς τοῦ y_0 νά ἔχουν τά αὐτά ἰδιάζοντα ὑπερβατικά σημεῖα.- Τά σημεῖα ταῦτα ἐκάλεσεν ὁ Rainλευέ σταθερά ἰδιάζοντα σημεῖα (points singuliers fixes). Ὁ Painlevé ἐπίσης ἐζήτησε, ἐν τῇ ρηθείσῃ περιπτώσει, ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (1) τῶν ὁποίων τά ὁλοκληρώματα νά ἔχωσι μόνον σταθερά ἰδιάζοντα σημεῖα καί ἀπέδειξεν ὅτι μόνον ἡ ἐξίσωσις τοῦ Riccati εἶναι τοιαύτη. Ὅθεν προκύπτει ὅτι, ὅταν ἔχωμεν νά μελετήσωμεν διαφ. ἐξίσωσιν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, μή ἀναγομένην εἰς ἐξίσωσιν τοῦ Riccati, εὑρισκόμεθα πρό πλειοτίμων συναρτήσεων. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύναταί τις νά συμπεράνῃ πόσον ἀλληλένδετοι εἶναι ἡ θεωρία τῶν συναρτήσεων καί ἡ τῶν διαφ. ἐξισώσεων. Ἴσως δέ αἱ νεώτεραι περί πλειοτίμων συναρτήσεων θεωρίαι νά συμβάλωσιν οὐχί ὀλίγον εἰς τήν πρόοδον τῆς θεωρίας τῶν διαφ. ἐξισώσεων. Μεταξύ τῶν θεωριῶν τούτων σημαίνουσαν θέσιν κατέχει καί ἡ γενίκευσις τοῦ Θεωρήματος τοῦ Picard ἡ δοθεῖσα ὑπό τοῦ ἀειμνήστου διδασκάλου μου Γ. Ρεμούνδου εἰς τοῦ ὁποίου τά διδάγματα ὀφείλεται καί ἡ παροῦσα ἐργασία.

Ἡ δυσκολία τοῦ προβλήματος τῆς ἀπ' εὐθείας ἐρεύνης τοιούτων ὁλοκληρωμάτων καί ἡ παράστασις αὐτῶν εἰς τύπους κατά τό μᾶλλον ἤ ἧττον ἐκτεταμένους, ἠνάγκασε τούς μαθηματικούς νά τροποποιήσωσι τό πρόβλημα καί νά ζητήσωσι ὁλοκληρώματα τά

---

1) Recherches sur les propriétés des fonctions definies par des équations differentielles "Journal de l'Ecole Polytechnique t. XXI 1896.

όποια νά τείνουν πρός τήν τιμήν y_0 όταν τό x τείνη κατά μήκος δρόμου τινός, καταλλήλως έκλεγομένου, πρός τήν τιμήν x_0.

Τό πρόβλημα έφ' ού έργαζόμεθα έν τή παρούση διατριβή, άφορά όλοκληρώματα έξισώσεων τής μορφής:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \tag{2}$$

"Ενθα $P(x, y)$ καί $Q(x, y)$ συναρτήσεις όλόμορφοι έν τή περιοχή τού μηδενός καί μηδενιζόμεναι διά $x=0$ $y=0$. Σχετικαί έρευναι έπί τού ζητήματος τούτου έγειναν πολλαί καί κατά διαφόρους κατευθύνσεις, ύπό τών Briot et Bouquet (1) Poincaré (2) καί Picard (3) άναφερόμεναι κυρίως είς τήν περίπτωσιν όπου τό σημείον $x=0$, $y=0$ είναι άπλούν σημείον τομής τών καμπύλων $P(x, y)=0$, $Q(x, y)=0$.

Τά αύτά ζητήματα έμελέτησαν κατόπιν καί οί κ.κ. Ben

---

1) Recherches sur les propriétés des fonctions definies par des équations differentielles "Journal de l'Ecole Polytechnique t. XXI, 1856.

2) "Sur les propriétés des fonctions définies par des équations differentielles" Journal de l'Ecole Polytechnique t. XXVIII, 1878.

3) Traité d'Analyse t. III p. 17 et p. 30 Paris Gauthier-Villars.

---

dixson (1) Dulac (2). Ἐξητάσθη ἐπίσης καὶ ἡ περίπτωσις καθ᾽ ἣν τὸ σημεῖον $x=0$, $y=0$ εἶναι πολλαπλοῦν σημεῖον τομῆς τῶν καμπύλων $P=0$, $Q=0$. Ἐπὶ τοῦ ζητήματος τούτου ἔχομεν ἐρεύνας τοῦ Briot et Bouquet Autonne (3) καὶ Dulac (4) ὅστις ἐζήτησε καὶ συνθήκας ἵνα τὸ γενικὸν ὁλοκλήρωμα δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν:

---

1) "Sur le developpement des integrales d'un système d'equations differentielles au voisinage d'un point singulier "Ofversigt af Kongl. VetensKaps Förhandlingar Stockholm, 1894.

2) Recherches sur les points singuliers des equations differentielles Première partie. Thése, Paris. Gauthier-Villars.

3) "Sur les équations differentielles du premier ordre et sur les singuliarités de ses intégrales algébriques. Journal de l'Ecole Polytéchnique, 1887.

4) Récherches sur les points singuliers des équations differentielles. Deuxième partie. Thèse, Paris. Gauthier-Villars 1903. "Integrales d'une équation differentielle dans le voisinage des conditions initiales singulières quelconques. Annales de l'Université de Grenoble t. XVII 1905. "Sur les points singuliers d'une équation differentielle." Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, 3ème serie, t. 1 (1909) et t. II (1910) "Solutions d'ordre imaginaire d'une équation differentielle. Bulletin de la Société Mathématique de France t. 39.

$$\prod_{i=1}^{n} \left[S_i(x.y)\right]^{\mu_i} = G$$

ἔνθα S_i εἶναι σειραί δυνάμεων μηδενιζόμεναι διά $x=0.\ y=0$ καί μ_i σταθεροί.

Ὁ Malmquist ἐσυνέχισε τάς μελέτας ταύτας καί εἰς τό ὑπόμνημά του "sur les points singuliers des équations differentielles" μελετᾶ ἰδιότητας ὁλοκληρωμάτων διαφορικῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς (2) χρησιμοποιῶν τήν μέθοδον ἀναγωγῆς τῶν Briot et Bouquet ἐξετάζει διαφόρους μορφάς διαφ. ἐξισώσεως καί ζητεῖ κλάδους ὁλοκληρωμάτων οἱ ὁποῖοι ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου $x=0$ δύνανται νά γραφῶσι $(G+\varepsilon)x^a$ ἔνθα G καί a σταθεροί καί ε τείνει πρός τό μηδέν διά ὅρ $x=0$. Οὕτω διά τήν διαφορικήν ἐξίσωσιν

$$x\,\frac{dy}{dx} = ay + \dots$$

ὅπου οἱ παραλειπόμενοι ὅροι περιέχουσι δυνάμεις τοῦ y μεγαλυτέρας ὡς καί δυνάμεις τοῦ x καί a ἀριθμός διάφορος τοῦ μηδενός. Οἱ Briot καί Bouquet ἀπέδειξαν ὅτι, ἐάν ὁ a δέν εἶναι θετικός καί ἀκέραιος, ὑπάρχει ἐν γένει σειρά δυνάμεων τοῦ x ἔχουσα πεδίον συγκλίσεως καί ἐπαληθεύουσα τήν διαφ. ἐξίσωσιν. Ὅταν ἡ σειρά τῶν Briot καί Bouquet ὑπάρχῃ καί ὁ a δέν εἶναι πραγματικός ἀρνητικός ἀριθμός, ἐκ τῶν ἔργων τῶν Poincaré καί Picard προκύπτει ὅτι ὑπάρχει μία σειρά:

$$(1) \qquad y - hx + \dots\dots + Gx^{\lambda}$$

βαίνουσα κατά τάς δυνάμεις τοῦ x καί Gx^{λ} ἡ ὁποία ἔχει πεδίον συγκλίσεως καί πληροῖ τήν διαφ. ἐξίσωσιν

διά πάσας τάς τιμάς τῆς σταθερᾶς τῆς ὁλοκληρώσεως
G. Ἐάν $C=0$ ἔχομεν τήν σειράν τοῦ Briot et Bouquet.

Ἐάν ὅμως ὁ ἀριθμός a εἶναι θετικός καί ἀκέραιος καί ἡ σειρά τῶν Briot et Bouquet δέν ὑπάρχη τότε ἐκ τῶν ἔργων τῶν ἔργων τῶν Bendixson. Lindelöf. Horn. Dulac ἐξάγεται ὅτι ὑπάρχει μία σειρά:

$$(2) \qquad y = hx + \ldots \ldots \left[C \pm b \log x\right] x^a + \ldots$$

ἥτις βαίνει κατά τάς δυνάμεις τοῦ x καί τῆς παραστάσεως $\left[C \pm b \log x\right] x^a$ καί ἡ ὁποία ἔχει πεδίον συγκλίσεως καί πληροῖ τήν διαφ. ἐξίσωσιν διά πάσας τάς τιμάς τῆς σταθερᾶς τῆς ὁλοκληρώσεως C. Ἡ σταθερά b εἶναι ἀκεραία καί ρητή συνάρτησις πεπερασμένου πλήθους συντελεστῶν τῆς διαφ. ἐξισώσεως. Ἐάν $b=0$ ἔχομεν τήν σειράν (1).-

Τάς σειράς (1) καί (2) λαμβάνει ὁ Malquist ὡς ὁρισμόν τῶν πρωτευόντων κλάδων ὁλοκληρωμάτων καί ἀποδεικνύει ὅτι ἐάν αἱ ἀρχικαί τιμαί $|x_0|$ $|y_0|$ εἶναι ἀρκετά μικραί. δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τήν σταθεράν C κατά τοιοῦτον τρόπον ὥστε ἡ σειρά (1) ἤ (2) νά παριστᾶ ὁλοκλήρωμα τό ὁποῖον διά $x=x_0$ νά λαμβάνη τήν τιμήν y_0. διότι αἱ ἐξισώσεις (1) καί (2) δύνανται νά λυθῶσι ὡς πρός $C x^a$ καί $\left[G \pm b \log x\right] x^a$.

Επισης ὁ Malquist ἐξετάζει τήν περίπτωσιν καθ' ἥν δέν ὑπάρχει ἡ σειρά (1) ὅτε θέτων $y = B(x) \pm z$ ἔνθα $B(x)$ παριστᾶ τήν σειράν τοῦ Briot et Bouquet. μετασχηματίζει τήν διαφ. ἐξίσωσιν εἰς τήν

$$x \frac{dz}{dx} = z\left[a \pm B(x, z)\right]$$

διά τήν ὁποίαν ἀποδεικνύει ὅτι ὑπάρχει ὁλοκλήρωμα ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς ἀρχικάς τιμάς x_0, z_0 (τῶν ὁποίων αἱ ἀπόλυτοι τιμαί εἶναι ἀρκετά μικραί $|x|<z_1 |z_0| < z'$) ὁλόμορφον ἐν τῷ τόπῳ τῷ ὁριζομένῳ ὑπό τοῦ κύκλου $|x| = \tau$ καί τῆς καμπύλης $|z| = \tau'$.

Ἀναλόγους σημαντικάς ἐρεύνας τοῦ Malquist (1) ἔχομεν καί δι'ἄλλας μορφάς διαφ. ἐξισώσεων.

Ὁ ἀείμνηστος διδάσκαλός μου Γ. Ρεμοῦνδος συνεχίζει τάς ἐρεύνας τῶν Briot et Bouquet ἀλλά κατ'ἄλλην κατεύθυνσιν. Ἤτοι δέν ἀναχωρεῖ ἀπό δεδομένην τιμήν τοῦ a διά νά μελετήσῃ τό εἶδος τῶν ὁλοκληρωμάτων, ἀλλά ζητεῖ ποίας συνθήκας δέον νά πληροῖ ὁ a ἵνα ὑπάρχῃ ὁλοκλήρωμα ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενός καί μηδενιζόμενον διά $x=0$. Οὕτω ἐν τῷ ἔργῳ του "Contribution à la theorie des singularités des equations differentielles du premier ordre (Bull. de la Soc. Mathe. de France 1908) ἐξετάζει τήν διαφορ. ἐξίσωσιν.

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \lambda y + f\ (x.y),\ \lambda \pm 0$$

ἔνθα $f(x.y)$ παριστᾷ συνάρτησιν ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου $x=0, y=0$ μηδενιζομένην διά $x=0$

---

1) Τό ἔργον τοῦτο Malquist εἴχομεν κυρίως ὑπ'ὄψιν εἰς τήν σύνταξιν τῆς παρούσης ὡς καί τοῦ Boutroux "Leçons sur les Fonctions definies par les equations differentielles."

$y=0$ καί μή περιέχουσαν όρον τής μορφής by καί αποδεικνύει 1) ότι τό σύνολον (L) τών τιμών τής παραμέτρου λ δι' άς ή διαφ. έξίσωσις δέχεται όλοκλήρωμα όλόμορφον έν τή περιοχή τού μηδενός καί μηδενιζόμενον διά $x=0$ δέν περιέχει ούδεμίαν θετικήν τιμήν όταν οί συντελεσταί τής $f(x.y)$ ύποτεθώσι πραγματικοί καί 2) ό λόγος:

$$\left|\sqrt[\nu]{\gamma_\nu}\right| : \left|\sqrt[\nu]{1.2.3\ldots(\nu-1)}\right|$$

ούδέποτε τείνει πρός τό άπειρον όταν τό ν τείνει είς τό άπειρον. Ένθα $\gamma_1\, \gamma_2\, \gamma_3 \ldots \gamma_\nu \ldots$ οί συντελεσταί τής σειράς ήτις είναι τυπικόν όλοκλήρωμα τής διαφ. έξισώσεως.

Τήν κατεύθυνσιν ταύτην ήκολουθήσαμεν καί ήμείς, έν τή παρούση διατριβή έν ή 1ον) ζητούμεν συνθήκας ύπό τάς όποίας ύπάρχει όλοκλήρωμα όλόμορφον έν τή περιοχή τού μηδενός καί μηδενιζόμενον διά $x=0$ τής διαφορ. έξισώσεως:

$$(1) \qquad x^2\frac{dy}{dx}=ay+x\varphi(x)+xf(x)y$$

2ον) Έρευνώμεν τάς διαφ. έξισώσεις.

$$(2) \qquad x^3\frac{dy}{dx}=ay+x\varphi(x)+Kxy$$

$$(3) \qquad x^2\frac{dy}{dx}=by+xA(x)+Ky^2$$

ένθα $\varphi(x).f(x)$ καί $A(x)$ συναρτήσεις όλόμορφοι έν τή περιοχή τού μηδενός, a, b, K σταθεροί.

Τήν διαφορικήν έξίσωσιν (1) έμελέτησε καί ό κ.

Β. Λύχρος όστις έν τή διατριβή αύτοῦ „Συμβολή είς τήν θεώρίαν τών άνωμαλιών τών διαφ. έξισώσεων πρώ της τάξεως" γράφει (σελ. 46) "Διά τής άνωτέρω έρεύνης μου καταφαίνεται ότι ή συνθήκη ύπάρξεως όλομόρφου όλοκληρώματος τών διαφ. έξισώσεων τής γενικωτέρας μορφής. άνάγεται είς τήν άπόδειξιν συγκλίσεως ούχί άκεραίας σειρᾶς άλλά σειράς πολυωνύμων. Διά τήν έν λόγῳ έξίσωσιν ήμεῖς εὕρομεν ώρισμένα έξαγόμενα. "Εστω ή διαφορική έξίσωσις:

$$x^2 \frac{dy}{dx} = ay + x\varphi(x) + x f(x) y$$

ένθα $\varphi(x)$ καί $f(x)$ συναρτήσεις όλόμορφοι έν τή περιοχή τοῦ μηδενός.

"Εστωσαν δέ

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots b_\nu x^\nu + \dots$$

$$f(x) = \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2 + \dots \delta_\nu x^{\nu-1} + \dots (1)$$

τά άναπτύγματα τών συναρτήσεων τούτων είς σειράς τοῦ Maclaurin καί

$$y = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots \gamma_\nu x^\nu + \dots$$

ή τυπικώς τήν διαφ. έξίσωσιν (1) έπαληθεύουσα σειρά.

Άντικαθιστῶντες τά $\varphi(x)$. $f(x)$ καί y έν τή διαφ. έξισώσει καί έξισοῦντες τούς συντελεστάς τών ἴσων δυνάμεων, λαμβάνομεν:

---

1) Αἵτινες ύποθέτομεν ότι συγκλίνουσιν άπολύτως έν τινι κύκλῳ έχοντι άκτίνα ο...

$$
\begin{aligned}
0 &= a\gamma_1 + b_0 \\
\gamma_1 &= a\gamma_2 + b_1 + \delta_1\gamma_1 \\
(1) \quad 2\gamma_2 &= a\gamma_3 + b_2 + \delta_1\gamma_2 + \delta_2\gamma_1 \\
3\gamma_3 &= a\gamma_4 + b_3 + \delta_1\gamma_3 + \delta_2\gamma_2 + \delta_3\gamma_1 \\
4\gamma_4 &= a\gamma_5 + b_4 + \delta_1\gamma_4 + \delta_2\gamma_3 + \delta_3\gamma_2 + \delta_4\gamma_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(\nu-1)\gamma_{\nu-1} &= a\gamma_\nu + b_{\nu-1} + \delta_1\gamma_{\nu-1} + \delta_2\gamma_{\nu-2} + \cdots + \delta_{\nu-2}\gamma_2 + \delta_{\nu-1}\gamma_1
\end{aligned}
$$

ἤ

$$
\begin{aligned}
\gamma_1 &= -\frac{1}{a} b_0 \\
\gamma_2 &= -\frac{1}{a}\left[b_1 + \gamma_1\delta_1 - \gamma_1\right] \\
\gamma_3 &= -\frac{1}{a}\left[b_2 + \gamma_1\delta_2 + \gamma_2\delta_1 - 2\gamma_2\right] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\gamma_\nu &= -\frac{1}{a}\left[b_{\nu-1} + \gamma_1\delta_{\nu-1} + \gamma_2\delta_{\nu-2} + \cdots + \gamma_{\nu-1}\delta_1 - (\nu-1)\gamma_{\nu-1}\right]
\end{aligned}
$$

Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων δυνάμεθα διαδοχικῶς νά προσδιορίσωμεν πάντας τούς συντελεστάς $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \cdots \gamma_\nu$ (1)

Ἵνα νῦν λάβωμεν τόν συντελεστήν γ_ν ὑπό μορφήν κατάλληλον διά τήν μελέτην τῶν συνθηκῶν λύσεως ὁλομόρφου ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενός, θέτομεν

$$
(3) \quad
\begin{aligned}
P_\nu &= \gamma_1\delta_{\nu-1} + \gamma_2\delta_{\nu-2} + \cdots + \gamma_{\nu-2}\delta_2 + \gamma_{\nu-1}\delta_1 \\
P_{\nu-1} &= \gamma_1\delta_{\nu-2} + \gamma_2\delta_{\nu-3} + \cdots + \gamma_{\nu-2}\delta_1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

---

1) Ἴδε διατριβήν κ. Β. Λύχρου σελ. 45

. . . .

. . . .

$$P_3 = \gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1$$

$$P_2 = \gamma_1 \delta_1$$

ὅτε:

$$\gamma_\nu = -\frac{1}{a}\left[b_{\nu-1} + P_\nu - (\nu-1)\gamma_{\nu-1}\right]$$

δυνάμει τῆς σχέσεως ταύτης ὁ συντελεστὴς γ_ν ἐκφράζεται συναρτήσει τῶν $b_0, b_1, b_2 \ldots b_{\nu-1}, P_2, P_3 \ldots P_\nu$.

Πράγματι

$$\gamma_{\nu-1} = -\frac{1}{a}\left[b_{\nu-2} + P_{\nu-1} - (\nu-2)\gamma_{\nu-2}\right]$$

ἄρα $$\gamma_\nu = -\frac{1}{a}\left[b_{\nu-1} + P_\nu + \frac{\nu-1}{a} b_{\nu-2} + \frac{\nu-1}{a} P_{\nu-1} - \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{a}\gamma_{\nu-2}\right]$$

ἤ

$$\gamma_\nu = -\frac{1}{a^2}\left[b_{\nu-1} a + (\nu-1) b_{\nu-2} + P_\nu a + (\nu-1) P_{\nu-1} - (\nu-1)(\nu-2)\gamma_{\nu-2}\right]$$

ἀλλὰ καὶ $$\gamma_{\nu-2} = -\frac{1}{a}\left[b_{\nu-3} + P_{\nu-2} - (\nu-3)\gamma_{\nu-3}\right]$$

ὅθεν $$\gamma_\nu = -\frac{1}{a^3}\Big[b_{\nu-1} a^2 + (\nu-1) b_{\nu-2} a + (\nu-1)(\nu-2) b_{\nu-3} + P_\nu a^2 -$$
$$- (\nu-1) P_{\nu-1} a + (\nu-1)(\nu-2) P_{\nu-2} - (\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)\gamma_{\nu-3}\Big]$$

Ἐργαζόμενοι ἀναλόγως λαμβάνομεν:

$$\gamma_\nu = -\frac{1}{a^{\nu-1}}\Big[b_{\nu-1} a^{\nu-2} + (\nu-1) b_{\nu-2} a^{\nu-3} + (\nu-1)(\nu-2) b_{\nu-3} a^{\nu-4} + \ldots$$

$$+ (\nu-1)(\nu-2) \ldots 3.2.\, b_1 + P_\nu a^{\nu-2} + (\nu-1) P_{\nu-1} a^{\nu-3} + \ldots +$$

$$+(\nu-1)(\nu-2)\ldots 3.2.\,P_2-(\nu-1)(\nu-2)\ldots 3.2.1\,\gamma_1\Big]$$

καί ἐπειδή $\gamma_1=-\frac{1}{a}b_0$ ἕπεται ὅτι :

$$\gamma_\nu=-\frac{1}{a^\nu}\Big[b_{\nu-1}a^{\nu-1}+(\nu-1)b_{\nu-2}a^{\nu-2}+\ldots(\nu-1)(\nu-2)\ldots 3.2.$$

$$.b_1 a+(\nu-1)\ldots 3.2.b_0+P_\nu a^{\nu-1}+(\nu-1)P_{\nu-1}a^{\nu-2}+(\nu-1)(\nu-2).$$

$$.P_{\nu-2}a^{\nu-3}+\ldots(\nu-1)(\nu-2)\ldots 3.2.P_2 a\Big]$$

ἤ

$$\gamma_\nu=-\frac{1.2.3\ldots(\nu-1)}{a^\nu}\Big[b_0+\frac{b_1}{1}a+\frac{b_2}{1.2}a^2-\ldots+\frac{b_{\nu-1}}{1.2.3\ldots(\nu-1)}a^{\nu-1}-$$

(4)

$$+\frac{P_2}{1}a+\frac{P_3}{1.2}a^2+\ldots+\frac{P_\nu}{1.2.3\ldots(\nu-1)}a^{\nu-1}\Big]$$

Ἐκ τῆς σχέσεως ταύτης συνάγομεν ὅτι ἡ σειρά

(5) $$y=\gamma_1 x+\gamma_2 x^2+\ldots\ldots+\gamma_\nu x^\nu+\ldots$$

ἥτις τυπικῶς ἐπαληθεύει τήν διαφ. ἐξίσωσιν (1) εἶναι ἐν μέρει ἀποκλίνουσα. Θά ζητήσωμεν νῦν νά εὕρωμεν τάς τιμάς τῆς παραμέτρου a διά τάς ὁποίας ἡ (5) παριστᾶ συνάρτησιν ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενός.

Πρός τοῦτο θά συγκρίνωμεν τούς συντελεστάς τῆς σειρᾶς (5) μέ τούς συντελεστάς $q_1\, q_2\, q_3\ldots q_\nu$ τῆς σειρᾶς

$$q(x)=q_1x+q_2x^2+q_3x^3+\ldots+q_\nu x^\nu+\ldots$$

ἥτις παριστᾶ συνάρτησιν ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενός μηδενιζομένην διά $x=0$ καί πληροῦσαν τήν ἐξίσωσιν

$$(6)\qquad xy = ay + x\varphi(x) + xf(x)y$$

τῆς ὁποίας τό δεύτερον μέλος εἶναι τό αὐτό μετά τῆς διαφ. ἐξισώσεως (1).

Ἐάν εἰς τήν (6) θέσωμεν $y = q(x)$ καί ἐξισώσωμεν τούς συντελεστάς τῶν ἴσων δυνάμεων, λαμβάνομεν:

$$q_1 = -\frac{1}{a} b_0$$

$$q_2 = -\frac{1}{a}\left[b_1 + q_1\delta_1 - q_1\right]$$

$$q_3 = -\frac{1}{a}\left[b_2 + q_1\delta_2 + q_2\delta_1 - q_2\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$q_\nu = -\frac{1}{a}\left[b_{\nu-1} + q_1\delta_{\nu-1} + q_2\delta_{\nu-2} + \cdots + q_{\nu-2}\delta_2 + q_{\nu-1}\delta_1 - q_{\nu-1}\right]$$

συγκρίνοντες νῦν τάς σχέσεις (2) καί (7) παρατηροῦμεν ὅτι ἐάν ἀπό τάς σχέσεις (2) παραλείψωμεν τούς παράγοντας τῶν τελευταίων ὅρων 2.3.4. . . .(ν-1) θά ἔχωμεν: $\gamma_1 = q_1$, $\gamma_2 = q_2$, $\gamma_3 = q_3$ . . . . $\gamma_\nu = q_\nu$ ἤτοι οἱ παράγοντες οὗτοι εἶναι ἐκεῖνοι οἵτινες ἐπιφέρουν την ἀπόκλισιν τῆς σειρᾶς (5) διό καί δύνανται νά κληθῶσι <u>παράγοντες ἀποκλίσεως</u>.

Ἐάν νῦν γράψωμεν τήν διαφ. ἐξίσωσιν (1) ὑπό τήν μορφήν: $$ay = x^2y' - x\varphi(x) - xf(x)y$$ καί ἀντικαταστήσωμεν πάντας τούς συντελεστάς τοῦ δευτέρου μέλους ὑπό τῶν μέτρων των, λαμβάνομεν νέαν διαφορικήν ἐξίσωσιν:

$$(8) \qquad |a|\, y = x^2 y' + x\Phi(x) + xF(x)y$$

ἔνθα αἱ $\Phi(x)$ καί $F(x)$ ἔχουν ὡς συντελεστάς τά μέτρα τῶν συντελεστῶν τῶν $\varphi(x)$ καί $f(x)$.

Ἔστω $G_1 x + G_2 x^2 + G_3 x^3 + \dots + G_\nu x^\nu \dots$ ἡ σειρά ἡ πληροῦσα τυπικῶς τήν ἐξίσωσιν (8), ὅτε θά ἔχωμεν τάς σχέσεις,

$$G_1 = \frac{1}{|a|}\, |b_1|$$

$$G_2 = \frac{1}{|a|}\Big[|b_1| + |\delta_1|\, G_1 + G_1 \Big]$$

$$G_3 = \frac{1}{|a|}\Big[|b_2| + |\delta_1|\, G_2 + |\delta_2|\, G_1 + 2\, G_2 \Big]$$

$$G_4 = \frac{1}{|a|}\Big[|b_3| + |\delta_1|\, G_3 + |\delta_2|\, G_2 + |\delta_3|\, G_1 + 3\, G_3 \Big]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$G_\nu = \frac{1}{|a|}\Big[|b_{\nu-1}| + |\delta_1|\, G_{\nu-1} + |\delta_2|\, G_{\nu-2} + \dots$$

$$+ |\delta_{\nu-2}|\, G_2 + |\delta_{\nu-1}|\, G_1 + (\nu-1)\, G_{\nu-1} \Big]$$

συγκρίνοντες νῦν τάς (2) καί (9) συνάγομεν ὅτι

$$(10) \qquad |\gamma_\nu| \leqq G_\nu$$

Ἄς λάβωμεν νῦν τήν ἐξίσωσιν:

$$|a|\, y = x y + x\Phi(x) + xF(x)y$$

ἔνθα $\Phi(x)$ καί $F(x)$ εἶναι αὐταί αὗται αἱ συναρτήσεις τοῦ δευτέρου μέλους τῆς διαφ. ἐξισώσεως (8) καί ἔστω

$${}_1 = W(x) = b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_\nu x^\nu + \dots$$

ἡ τυπικῶς ἐπαληθεύουσα ταύτην σειράν, ἥτις ὡς γνωστόν (1) ὁρίζει μίαν συνάρτησιν $W(x)$ ὀλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενός. Οἱ συντελεσταί $b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_\nu \ldots$ προσδιορίζονται ὑπό τῶν σχέσεων:

$$b_1 = \frac{1}{|a|}\,|b_0|$$

$$b_2 = \frac{1}{|a|}\Big[|b_1| + |\delta_1|\; b_1 + b_1\Big]$$

$$b_3 = \frac{1}{|a|}\Big[|b_2| + |\delta_1|\; b_2 + |\delta_2|\; b_1 + b_2\Big]$$

$$b_4 = \frac{1}{|a|}\Big[|b_3| + |\delta_1|\; b_3 + |\delta_2|\; b_2 + |\delta_3|\; b_1 + b_3\Big]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_\nu = \frac{1}{|a|}\Big[|b_{\nu-1}| + |\delta_1|\; b_{\nu-1} + |\delta_2|\; b_{\nu-2} + \cdots + |\delta_{\nu-1}|\; b_1 + b_{\nu-1}\Big]$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (7) καί (11) ἕπεται ὅτι:

$$|q_\nu| \leqq b_\nu$$

Συγκρίνοντες νῦν τάς σχέσεις (9) καί (11) συνάγομεν ὅτι:

$$G_1 = b_1$$

$$G_2 = b_2$$

$$G_3 < \frac{1{,}2}{|a|}\Big[|b_2| + |\delta_1|\; b_2 + |\delta_2|\; b_1 + b_2\Big] = 1{,}2\; b_3$$

$$G_4 \leq \frac{1.2.3}{|a|}\Big[|b_3| + |\delta_1|\; b_3 + |\delta_2|\; b_2 + |\delta_3|\; b_1 + b_3\Big] = 1.2{,}3\; b_4$$

---

1) G. Remoundos "sur la densité des zeros des series des fonctions et les singularités des équations differentielles." p. 14.

. . . .

. . . .

$$G_\nu < \frac{1.2.3\ldots(\nu-1)}{a}\left[|\delta_{\nu-1}| + |\delta_1|\, b_{\nu-1} + |\delta_2|\, b_{\nu-2} + \ldots + |\delta_{\nu-1}|\, b_1 + b_{\nu-1}\right]$$

ἤ

$$G_\nu < 1.2.3\ldots(\nu-1)\, b_\nu$$

καί δυνάμει τῆς (10)

$$(12) \qquad |\gamma_\nu| < 1.2.3\ldots(\nu-1)\, b_\nu$$

Ἡ σχέσις (12) ἔχει ἀποδειχθῆ καί ἐν τῇ γενικῇ περιπτώσει τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως (2)

$$x^2 \frac{dy}{dx} = ay + f(x.y)$$

Ἔστωσαν νῦν αἱ σειραί:

$$\sigma(x) = b_0 - \frac{b_1}{1}x - \frac{b_2}{1.2}x^2 - \ldots - \frac{b_\nu}{1.2.3\ldots\nu}x^\nu - \ldots$$

$$Q(x) = \frac{P_2}{1}x + \frac{P_3}{1\,2}x^2 + \ldots + \frac{P_{\nu+1}}{1.2.3\ldots\nu}x^\nu + \ldots$$

Ἐκ τούτων ἡ πρώτη παριστᾶ συνάρτησιν ἀκεραίαν $\sigma(x)$ συγκλίνουσαν εἰς ὅλον τό ἐπίπεδον. Λέγομεν ὅτι καί ἡ δευτέρα σειρά συγκλίνει ἔν τινι κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα διάφορον τοῦ μηδενός. Πράγματι ἔχομεν:

---

2) G. Remoundos "Les singularités des équations differentielles et les series sommables." (Bul. de la Soc. Math. de France, p.3)

$$P_\nu = \delta_1 \gamma_{\nu-1} + \delta_2 \gamma_{\nu-2} + \dots + \delta_{\nu-2} \gamma_2 + \delta_{\nu-1} \gamma_1$$

ἄρα
$$|P_\nu| \leqq |\delta_1| \, |\gamma_{\nu-1}| + |\delta_2| \cdot |\gamma_{\nu-2}| + \dots + |\delta_{\nu-2}| \cdot |\gamma_2| + |\delta_{\nu-1}| \cdot \gamma_1$$

καὶ δυνάμει τῆς ἀνισότητος (12) ἕπεται ἔτι μᾶλλον:

$$|P_\nu| < |\delta_1| (\nu-2) \, b_{\nu-1} + |\delta_2| (\nu-3) \, b_{\nu-2} + \dots + |\delta_{\nu-2}| b_2 + |\delta_{\nu-1}| \, b_1$$

ἤ

$$|P_\nu| < (\nu-2) \left[|\delta_1| \, b_{\nu-1} + |\delta_2| \, b_{\nu-2} + \dots + |\delta_{\nu-1}| \, b_1 \right]$$

ὅθεν

$$(13) \quad \frac{|P_\nu|}{1.2.3 \dots (\nu-1)} < \frac{D_\nu}{\nu-1}, \text{ ἔνθα } D_\nu = |\delta_1| \, b_{\nu-1} + \dots |\delta_{\nu-1}| \, b_1$$

Ἀλλ' ἡ σειρά $b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots + b_\nu x^\nu + \dots$ συγκλίνει ἀπολύτως ἔν τινι κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα τ_1 ἔνθα $|\tau_1| > 0$ ὁμοίως καὶ ἡ σειρά: $\delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 x^2 + \dots + \delta_\nu x^{\nu-1} + \dots$ ἥτις εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς $f(x)$, συναρτήσεως ὁλομόρφου ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενός, συγκλίνει ἀπολύτως ἔν τινι κύκλῳ ἀκτῖνος $\tau_2 > 0$, ἄρα καὶ ἡ σειρά ἡ ἔχουσα γενικὸν ὅρον:

$$D_\nu \, x^{\nu-1} = \left[|\delta_1| \, b_{\nu-1} + |\delta_2| \, b_{\nu-2} + \dots + |\delta_{\nu-1}| \, b_1 \right] x^{\nu-1}$$

συγκλίνει ἀπολύτως ἔν τινι κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα $\tau_3 > 0$ (Ἴδε Jordan page, 280, t. 1).

Ἄρα δυνάμει τῆς ἀνισότητος (13) καὶ ἡ σειρά:

$$\sum_{\nu=2}^{\nu=\infty} \frac{P_\nu}{1.2.3 \dots (\nu-1)} x^{\nu-1}$$

συγκλίνει ἀπολύτως ἔν τινι κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα τοὐλάχιστον τ_3 (1).

Ἤτοι διά πᾶσαν τιμήν τοῦ x πληροῦσαν τήν ἀνισότητα $|x| < \tau_3$ θά ἔχωμεν ὅτι ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν ἔστω τῆς 11 καί ἑξῆς ὁ λόγος:

$\frac{1}{\nu} \left| \frac{P_{\nu-1}}{P_\nu} \right| |x|$ θά μένη μικρότερος ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος.

Ἔστω νῦν ὅτι ὁ ἀριθμός a εἶναι κοινή ρίζα τῶν $\sigma(x)$ καί $Q(x)$,

ἤτοι $\sigma(a) = Q(a) = 0$ καί ἄς θέσωμεν

$$\sigma_\nu(a) = b_0 + \frac{b_1}{1} a + \frac{b_2}{12} a^2 + \dots \frac{b_{\nu-1}}{1.2.3..(\nu-1)} a^{\nu-1}$$

$$Q_\nu(a) = \frac{P_2}{1} a + \frac{P_3}{12} a^2 + \dots + \frac{P_\nu}{1.2.3...(\nu-1)} a^{\nu-1}$$

$$R_1(a) = \frac{b_\nu}{1.2.3...\nu} a^\nu + \frac{b_{\nu+1}}{1.2.3...\nu(\nu+1)} a^{\nu+1} + \dots$$

$$R_2(a) = \frac{P_{\nu+1}}{1.2.3...\nu} a^\nu + \frac{P_{\nu+2}}{1.2.3...\nu(\nu+1)} a^{\nu+1} + \dots$$

ὅτε θά ἔχωμεν:

$$\sigma(a) = \sigma_\nu(a) + R_1(a) = 0$$

$$Q(a) = Q_\nu(a) + R_2(a) = 0$$

καί ἑπομένως ἡ σχέσις (4) γίνεται:

$$\gamma_\nu = \frac{1.2.3.....(\nu-1)}{a^\nu} \left[R_1(a) + R_2(a) \right]$$

ἤ

1) Ἰδ. Απειροστικόν λογισμόν Π. Ζερβοῦ.

$$\gamma_\nu = \frac{1}{a^\nu}\left[\left(\frac{b_\nu}{\nu}a^\nu + \frac{b_{\nu+1}}{\nu(\nu+1)}a^{\nu+1}+\cdots\right)+\left(\frac{P_{\nu+1}}{\nu}a^\nu + \frac{P_{\nu+2}}{\nu(\nu+1)}a^{\nu+1}+\cdots\right)\right]$$

Ἵνα νῦν ἡ σειρά (5) παριστᾷ συνάρτησιν ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενός δέον:

$$\left|\sqrt[\nu]{\gamma_\nu}\right| = \left|\frac{1}{a}\sqrt[\nu]{\left[\frac{b_\nu}{\nu}a^\nu + \frac{b_{\nu+1}}{\nu(\nu+1)}a^{\nu+1}+\cdots\right]+\left[\frac{P_{\nu+1}}{\nu}a^\nu + \frac{P_{\nu+2}}{\nu(\nu+1)}a^{\nu+1}+\cdots\right]}\right|$$

νά μή ἔχῃ ἀνώτερον ὅριον τό ἄπειρον ὅταν τό ν τείνει πρός τό ἄπειρον.

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ἡ σειρά : $\varphi(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_\nu x^\nu+\cdots$ συγκλίνει ἀπολύτως ἐν τινι κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα διάφορον τοῦ μηδενός, ἐπομένως ἐάν ὁ ἀριθμός a παριστᾷ σημεῖον τοῦ κύκλου συγκλίσεως (ἤτοι ἐάν ἡ $\varphi(x)$ εἶναι ὁλόμορφος διά $x=a$) θά ἔχωμεν ὅτι εἰς πάντα θετικόν ἀριθμόν ε_ν θά ἀντιστοιχῇ τιμή τις τοῦ δείκτου ν, ἔστω ν_1, τοιαύτη ὥστε διά $\nu>\nu_1$ νά ἔχωμεν

$$|b_\nu a^\nu| + |b_{\nu+1}a^{\nu+1}| + \cdots + |b_{\nu+\mu}a^{\nu+\mu}| < \varepsilon_\nu$$

διά πᾶσαν αὐθαίρετον τιμήν τοῦ μ.

Ἐπειδή δέ

$$\left|\frac{b_\nu}{\nu}a^\nu\right| + \left|\frac{b_{\nu+1}}{\nu(\nu+1)}a^{\nu+1}\right| + \cdots + \left|\frac{b_{\nu+\mu}}{\nu\cdots(\nu+\mu)}a^{\nu+\mu}\right| < \frac{1}{\nu}\left[|b_\nu a^\nu| + \cdots + |b_{\nu+\mu}a^{\nu+\mu}|\right]$$

ἕπεται ὅτι καί

$$\left|\frac{b_\nu}{\nu}a^\nu + \frac{b_{\nu+1}}{\nu(\nu+1)}a^{\nu+1} + \cdots + \frac{b_{\nu+\mu}}{\nu(\nu+1)\cdots(\nu+\mu)}a^{\nu+\mu}\right| < \varepsilon'_\nu$$

διά πᾶσαν τιμήν τοῦ μ, ἔνθα ε'_ν τείνει πρός τό μηδέν μετά τοῦ $\frac{1}{\nu}$ ..

Ἔστω νῦν ἡ σειρά :

(14) $$\left|f_\kappa(x)\right| = \left|\frac{P_{\kappa+1}}{\kappa} x^\kappa\right| + \left|\frac{P_{\kappa+2}}{\kappa(\kappa+1)} x^{\kappa+1}\right| + \dots + \left|\frac{P_{\kappa+\mu+1}}{\kappa(\kappa+1)\dots(\kappa+\mu)} x^{\kappa+\mu}\right| +$$

Ἐπειδή ὁ λόγος τῆς σειρᾶς (14) εἶναι ὁ αὐτός οὗτος ὁ λόγος τῆς σειρᾶς :

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{|P_\nu|}{1.2.3...(\nu-1)} x^{\nu-1}$$

ἥτις συγκλίνει ἔν τινι κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα $\tau' > \tau_3$. ἔνθα τ_3 ἡ ἀκτίς συγκλίσεως τῆς σειρᾶς :

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} D_\nu x^{\nu-1}$$

Ἕπεται ὅτι καί ἡ σειρά (14) συγκλίνει ὁμοίως. Ἤτοι διά τιμάς τοῦ x πληρούσας τήν ἀνισότητα $|x| < \tau_3$ καί διά $\kappa > n$ θά ἔχωμεν :

$$\frac{1}{(\kappa+\mu)} \left| \frac{P_{\kappa+\mu+1}}{P_{\kappa+\mu}} x \right| < h < 1$$

Ἐπομένως ἐάν $|a| < \tau_3$ δηλαδή ἐάν ὁ a παριστᾶ σημεῖον τοῦ κύκλου συγκλίσεως τῆς σειρᾶς $\sum_{\nu=2}^{\infty} D_\nu x^{\nu-1}$ καί καλέσωμεν $|f_\kappa(a)|$ τήν τιμήν τῆς σειρᾶς (14) διά $x = a$, θα ἔχωμεν ὅτι ἡ $|f_\kappa(\infty)|$ μένει πεπερασμένη διά πᾶσαν τιμήν τοῦ $\kappa \geqq n$ ἐπομένως καί διά $\kappa = \nu$ ἔνθα ν τείνει πρός τό ἄπειρον.

Λέγομεν νῦν ὅτι ἡ ἀκολουθία :

(15) $$\left|\sqrt[\nu]{F_\nu(a)}\right|, \left|\sqrt[\nu+1]{F_{\nu+1}(a)}\right|, \left|\sqrt[\nu+2]{F_{\nu+2}(a)}\right| \dots$$

ἔνθα $F_\nu(a) = |6_\nu(a)|$ εἶναι περατωμένη. Τῷ ὄντι, ἔστω θετικός τις ἀριθμός $m>1$, λέγομεν ὅτι δυνάμεθα νά εὕρωμεν τιμήν ἀντίστοιχον τοῦ ν, ἔστω τήν ν_1 τοιαύτην ὥστε διά $\nu>\nu_1$ νά ἔχωμεν:

$$\left|\sqrt[\nu+\mu]{F_{\nu+\mu}(a)}\right| < m \quad \mu=1,2,3\ldots$$

Διότι ἔστω ὅτι:

$$\sqrt[\nu+\mu]{F_{\nu+\mu}(a)} \geqq m$$

ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καί ἐφεξῆς. ἤ δι᾽ ἀπείρους τιμάς τοῦ ν ἄς δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἀπό οἱασδήποτε στιγμῆς καί πέραν, τότε:

$$F_{\nu+\mu}(a) \geqq m^{\nu+\mu}$$

ἀλλά $\displaystyle m^{\nu+\mu}\underset{\nu=\infty}{=}\infty$ ἑπομένως καί ἡ $F_{\nu+\mu}(a)$ ἀπό τινος τιμῆς τοῦ ν καί ἐφεξῆς. ἤ δι᾽ ἀπείρους τιμάς τοῦ ν, δέν θά ἦτο πεπερασμένη, ὅπερ ἄτοπον.

Ἄρα ἡ ἀκολουθία (15) εἶναι περατωμένη, συνεπῶς καί ἡ ἀκολουθία:

$$(16)\quad \left|\sqrt[\nu]{\varepsilon'_\nu + F_\nu(a)}\right| \left|\sqrt[\nu+1]{\varepsilon'_{\nu+1} + F_{\nu+1}(a)}\right|, \ldots$$

εἶναι ὁμοίως περατωμένη. Ἔστω M τό ἀνώτερον πέρας τῆς (16) ὁπότε:

$$\left|\sqrt[\nu]{\gamma_\nu}\right| = \left|\frac{1}{a}\sqrt[\nu]{\left[\frac{b_\nu}{\nu}a^\nu \ldots + \frac{b_{\nu+\mu}}{\nu\ldots(\nu+\mu)}a^{\nu+\mu}\right] + \left[\frac{P_{\nu+1}}{\nu}a^\nu + \ldots + \frac{P_{\nu+\mu+1}}{\nu\ldots(\nu+\mu)}a^{\nu+n}\right]}\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{|a|}\left|\sqrt[\nu]{\varepsilon_\nu + F_\nu(a)}\right| < \frac{1}{|a|}M$$

Εάν όμως ό άριθμός a δέν είναι κοινή ρίζα τών $\sigma(x)$ καί $Q(x)$ τότε

$$\left|\sqrt[\nu]{\gamma_\nu}\right| = \left|\frac{1}{a}\sqrt[\nu]{1.2.3\ldots(\nu-1)}_{\nu=\infty}\left[\sigma(a)+Q(a)\right]\right| = \infty$$

καί συνεπώς ή άκτίς συγκλίσεως τής σειράς (5) ήτις έπαληθεύει τυπικώς τήν διαφ. έξίσωσιν (1) θά έτεινε πρός τό μηδέν.

Έκ τών άνωτέρω συνάγεται ότι:

Ή διαφορική έξίσωσις

$$(1) \qquad x^2\frac{dy}{dx} = ay + x\varphi(x) + xf(x)$$

ένθα $\varphi(x)$ καί $f(x)$ είναι συναρτήσεις όλόμορφοι έν τή περιοχή τού μηδενός, δέχεται όλοκλήρωμα όλόμορφον έν τή περιοχή τής τιμής ταύτης καί μηδενιζόμενον διά $x=0$, όταν ή παράμετρος a πληροί τάς έξής συνθήκας.

1) Ό άριθμός a είναι κοινή ρίζα τών συναρτήσεων:

$$\sigma(x) = b_0 + \frac{b_1}{1}x + \frac{b_2}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{b_\nu}{1.2.3\ldots\nu}x^\nu + \ldots$$

$$Q(x) = \frac{P_2}{1}x + \frac{P_3}{1.2}x^2 + \ldots + \frac{P_{\nu+1}}{1.2.3\ldots\nu}x^\nu + \ldots$$

2) Αί συναρτήσεις:

$$\varphi(x) \quad \text{καί} \quad D(x) = \sum_{\nu=2}^{\infty} D_\nu x^{\nu-1}$$

είναι όλόμορφοι διά $x=a$.

Έν τοίς άνωτέρω οί συντελεσταί D_ν δίδονται ύπό τής σχέσεως.

$$D_\nu = |\delta_1|\ b_{\nu-1} + |\delta_2|\ b_{\nu-2} + \dots + |\delta_{\nu-1}|\ b_1$$

ἔνθα δ_i $(i = 1.2.3\dots\nu)$ εἶναι οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς ἐν τῇ διαφορικῇ ἐξισώσει συναρτήσεως $f(x)$ καὶ b_i $(i = 1.2.3\dots\nu)$ οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς συναρτήσεως $W(x)$ ἥτις πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν:

$$|a|\ y = xy + x\,\Phi(x) + xF(x)y$$

ἔνθα

$$\Phi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu|\ x^\nu$$

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} |\delta_\nu|\ x^{\nu-1}$$

<u>Θεωρήσωμεν</u> νῦν τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν:

$$(1) \qquad x^3 \frac{dy}{dx} = ay - x\varphi(x) + \kappa xy$$

ἔνθα $\varphi(x)$ παριστᾷ συνάρτησιν ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενὸς καὶ a, κ σταθεροί. Ἔστω

$$\varphi(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots b_\nu x^\nu + \quad (1)$$

καὶ

$$y = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots \gamma_\nu x^\nu + \dots$$

ἡ τυπικῶς τὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν (1) ἐπαληθεύουσα σειρά

---

1) Υποθέτομεν ὅτι ἡ σειρὰ $b_0 - \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu x^\nu$ συγκλίνει ἀπολύτως ἔν τινι κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα διάφορον τοῦ μηδενός.

Θά ζητήσωμεν πρῶτον νά προσδιορίσωμεν τούς συντελεστάς $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdot \cdot \cdot \cdot \gamma_\nu \cdot \cdot \cdot$ καί δεύτερον νά εὕρωμεν τάς συνθήκας ἅς δέον νά πληροῖ ἡ παράμετρος a ἵνα ὑπάρχη ὁλοκλήρωμα ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενός καί μηδενιζόμενον διά $x=0$.

Ἀντικαθιστῶντες τά $y, \frac{dy}{dx}, \varphi(x)$ διά τῶν ἴσων των ἐν τῇ (1) καί ἐξισοῦντες τούς συντελεστάς τῶν ἴσων δυνάμεων, λαμβάνομεν:

$$\gamma_1 = -\frac{1}{a} b_0$$

$$\gamma_2 = -\frac{1}{a}\left[b_1 + \kappa\gamma_1\right]$$

$$\gamma_3 = -\frac{1}{a}\left[b_2 + \kappa\gamma_2 - \gamma_1\right]$$

$$\gamma_4 = -\frac{1}{a}\left[b_3 + \kappa\gamma_3 - 2\gamma_2\right]$$

$$\gamma_5 = -\frac{1}{a}\left[b_4 + \kappa\gamma_4 - 3\gamma_3\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma_\nu = -\frac{1}{a}\left[b_{\nu-1} + \kappa\gamma_{\nu-1} - (\nu-2)\gamma_{\nu-2}\right]$$

Ἐάν δέ θέσωμεν:

$$P_{\nu-1} = b_{\nu-1} + \kappa\gamma_{\nu-1}$$

$$P_{\nu-2} = b_{\nu-2} + \kappa\gamma_{\nu-2}$$

$$P_1 = b_1 + \kappa\gamma_1$$

λαμβάνομεν ἐάν $\underline{\nu = 2n+1}$

$$\gamma_\nu = \gamma_{2n+1} = -\frac{1}{a^n}\Big[P_{2n}\,a^{n-1} + (2n-1)\,P_{2n-2}\,a^{n-2} + \ldots + (2n-1)\ldots 5.3\,P_2 -$$

$$- (2n-1)\ldots 5.3.1\,\gamma_1\Big]$$

καί ἐπειδή $\gamma_1 = -\frac{1}{a}\,b_0$ ἕπεται :

$$\gamma_{2n+1} = -\frac{1}{a^{n+1}}\Big[P_{2n}\,a^n + (2n-1)\,P_{2n-2}\,a^{n-1} + \ldots + (2n-1)\ldots 5.3\,P_2 a +$$

$$+ (2n-1)\ldots 5.3.1\,b_0\Big]$$

ἤ

$$\gamma_{2n+1} = -\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{a^{n+1}}\Big[b_0 + \frac{P_2}{1}a + \frac{P_4}{1.3}a^2 + \frac{P_6}{1.3.5}a^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{P_{2n}}{1.3.5\ldots(2n-1)}\,a^n\Big]$$

Ἐάν δέ $\underline{\nu = 2n}$ θά ἔχωμεν

$$\gamma_{2n} = -\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{a^n}\Big[P_1 + \frac{P_3}{2}a + \frac{P_5}{2.4}a^2 + \ldots + \frac{P_{2n-1}}{2.4.6\ldots(2n-2)}\,a^{n-1}\Big]$$

Ἐάν νῦν ἀντί τῶν βοηθητικῶν ποσοτήτων $P_1 . P_2 , P_3$ ... θέσωμεν τά ἴσα των, λαμβάνομεν:

$$(3)\qquad \gamma_{2n+1} = -\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{a^{n+1}}\Big[b_0 + \frac{b_2}{1}a + \frac{b_4}{1.3}a^2 + \ldots + \frac{b_{2n}}{1.3.5\ldots(2n-1)}\,a^n +$$

$$K\Big[\frac{\gamma_2}{1}a + \frac{\gamma_4}{1.3}a^2 + \ldots + \frac{\gamma_{2n}}{1.3.5\ldots(2n-1)}\,a^n\Big]\Big]$$

$$(4)\qquad \gamma_{2n} = -\frac{2.4.6\ldots(2n-2)}{a^n}\Big[b_1 + \frac{b_3}{2}a + \frac{b_5}{2.4}a^2 + \ldots + \frac{b_{2n-1}}{2.4\ldots(2n-2)}\,a^{n-1} +$$

$$+K\left[\gamma_1+\frac{\gamma_2}{2}a+\frac{\gamma_5}{2.4}a^2+\ldots+\frac{\gamma_{2n-1}}{2.4\ldots(2n-2)}a^{n-1}\right]\Bigg]$$

Πρίν ή προβῶμεν εἰς τήν ἔρευναν τῆς συγκλίσεως τῆς σειρᾶς :

$$y=\gamma_1 x+\gamma_2 x^2+\gamma_3 x^3+\ldots+\gamma_\nu x^\nu+\ldots$$

ἥτις ἐπαληθεύει τυπικῶς τήν διαφ. ἐξίσωσιν (1) θά συγκρίνωμεν τούς συντελεστάς ταύτης μέ τούς συντελεστάς τῆς σειρᾶς .

$$y=g(x)=\delta_1 x+\delta_2 x^2+\ldots+\delta_\nu x^\nu+\ldots$$

ἥτις παριστᾶ συνάρτησιν $g(x)$ ὁλόμορφον (1) ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενός, μηδενιζομένην διά $x=0$ καί πληροῦσαν τήν ἐξίσωσιν :

$$x^2y=ay+x\varphi(x)+Kxy$$

τῆς ὁποίας τό δεύτερον μέλος εἶναι τό αὐτό μέ τό τῆς διαφ. ἐξισώσεως (1)

Ἄς γράψωμεν τήν διαφ. ἐξίσωσιν ὑπό τήν μορφήν:

$$ay=x^3y'-x\varphi(x)-Kxy$$

καί ἄς ἀντικαταστήσωμεν πάντας τούς συντελεστάς τοῦ δευτέρου μέλους ὑπό τῶν μέτρων των, ὅτε θά ἔ-

---

1) Διά τιμάς τοῦ x πληρούσας τήν σχέσιν:

$$|x|<\frac{1}{2}\left|K-\sqrt{K^2-na^2}\right|$$

χωμεν τήν διαφ. ἐξίσωσιν

$$(6) \quad |a|\, y = x^3 y' + x\,\Phi(x) - |K|\, xy$$

Ἐάν

$$y = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots + b_\nu x^\nu + \dots$$

εἶναι ἡ σειρά ἡ τυπικῶς ἐπαληθεύουσα τήν (6) θά ἔχωμεν τάς σχέσεις :

$$(7) \quad \begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{|a|} |\beta_0| \\ b_2 &= \frac{1}{|a|} \left(|\beta_1| + |K|\, b_1 \right) \\ b_3 &= \frac{1}{|a|} \left(|\beta_2| + |K|\, b_2 + b_1 \right) \\ b_4 &= \frac{1}{|a|} \left(|\beta_3| + |K|\, b_3 + 2 b_2 \right) \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ b_\nu &= \frac{1}{|a|} \left(|\beta_{\nu-1}| + |K|\, b_{\nu-1} + (\nu-2)\, b_{\nu-2} \right) \end{aligned}$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (2) καί (7) ἕπεται ὅτι :

$$(8) \quad |\gamma_\nu| \leqq b_\nu$$

Ἄς λάβωμεν νῦν τήν ἐξίσωσιν :

$$|a|\, y = x^2 y + x\,\Phi(x) + |K|\, x \cdot y$$

ἥτις ὁρίζει μίαν συνάρτησιν $G(x) = G_1 x + G_2 x^2 + \dots + G_\nu x + \dots$ ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενός καί μηδενιζομένην δια τήν τιμήν ταύτην. Αἱ σχέσεις δι' ὧν προσδιορίζονται οἱ συντελεσταὶ $C_1, C_2, C_3, C_\nu \ldots$ εἶναι:

$$C_1 = \frac{1}{|a|} |b_0|$$

$$C_2 = \frac{1}{|a|} \left[|b_1| + |k| C_1 \right]$$

$$C_3 = \frac{1}{|a|} \left[|b_2| + |k| C_2 + C_1 \right]$$

$$C_4 = \frac{1}{|a|} \left[|b_3| + |k| C_3 + C_3 \right]$$

$$\cdots \cdots \cdots$$

$$C_\nu = \frac{1}{|a|} \left[|b_{\nu-1}| + |k| C_{\nu-1} + C_{\nu-2} \right]$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (7) και (9) ἕπονται αἱ ἐξῆς:

$$b_1 = C_1$$

$$b_2 = C_2$$

$$b_3 = C_3$$

$$b_4 < \frac{2}{|a|} \left[|b_3| + |k| \quad b_3 + b_2 \right] = 2\, C_4$$

$$b_5 < \frac{1}{|a|} \left[|b_4| + |2k| \; C_4 + 3\, C_3 \right] < \frac{1.3}{|a|} \left[|b_4| + |k| \; C_4 + C_3 \right] = 1.3\; C_5$$

$$b_6 < \frac{1}{|a|} \left[|b_5| + 1.3 |k| \; C_5 + 4.2\; C_4 \right] < \frac{2.4}{|a|} \left[|b_5| + |k| \; C_3 + C_4 \right] = 2.4\; C_6$$

$$b_7 < \frac{1}{|a|} \left[|b_6| + 2.4 |k| \; C_6 + 3.5\; C_5 \right] < \frac{1.3.5}{|a|} \left[|b_6| + |k| \; C_6 + C_5 \right] = 1.3.5\; C_7$$

$$\cdots \cdots \cdots$$

$$\cdots \cdots \cdots$$

. . . .

$$b_{2n} < \frac{1}{|a|}\left[\,|b_{2n-1}| + 3.5.7\ldots(2n-3)\,|\kappa|\,c_{2n-1} + 2.4.6\ldots(2n-2)\,c_{2n-2}\right] <$$

$$< 2.4.6\ldots(2n-2)\,c_{2n}$$

$$b_{2n+1} < \frac{1}{|a|}\left[\,|b_{2n}| + 2.4.6\ldots(2n-2)\,|\kappa|\,c_{2n} + 3.5.7\ldots(2n-1)\,c_{2n-1}\right] <$$

$$< 3.5.7\ldots(2n-1)\,c_{2n+1}$$

δυνάμει δέ τῆς (8) θά ἔχωμεν:

$$|\gamma_{2n}| < 2.4.6\ldots(2n-2)\,c_{2n} < 1.3.5.7\ldots(2n-1)\,c_{2n}$$

$$|\gamma_{2n+1}| < 1.3.5\ldots(2n-1)\,c_{2n+1} < 2.4.6\ldots2\nu\,c_{2n+1}$$

Ἵνα νῦν ἡ σειρά (5) παριστᾶ συνάρτησιν ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενός δέον $\left|\sqrt[\nu]{\gamma_\nu}\right|$ νά μή ἔχῃ ἀνώτερον ὅριον τό ἄπειρον ὅταν τό ν τείνῃ πρός τό ἄπειρον, καί τοῦτο θά συμβαίνει ὑπό ὡρισμένας συνθήκας ἅς δέον νά πληροῖ ἡ παράμετρος a. διότι ὡς ἐκ τῶν σχέσεων (3) (4) εὐκόλως συνάγεται ἡ (5) εἶναι ἐν γένει σειρά ἀποκλίνουσα, τάς συνθήκας ταύτας θά ζητήσωμεν νά εὕρωμεν.

Πρός τοῦτο ἔστωσαν αἱ σειραί:

$$f(x) = b_0 + \frac{b_2}{1}x + \frac{b_4}{1.3}x^2 + \frac{b_6}{1.3.5}x^3 + \cdots + \frac{b_{2n}}{1.3.5\ldots(2n-1)}x^n + \cdots$$

$$\Gamma(x) = \frac{\gamma_2}{1}x + \frac{\gamma_4}{1.3}x^2 + \frac{\gamma_6}{1.3.5}x^3 + \cdots + \frac{\gamma_{2n}}{1.3.5\ldots(2n-1)}x^n + \cdots$$

καὶ $\left|\sqrt[2\eta+1]{\gamma_{2\eta+1}}\right| = \left|\frac{1}{a^{\frac{1}{2-\frac{1}{\eta+1}}}}\sqrt[2\eta+1]{\left|\frac{b_{2\eta+2}}{2\eta+1}a^{\eta+1}+\dots\right|+\kappa\left|\frac{\gamma_{2\eta+2}}{2\eta+1}a^{\eta+1}+\dots\right|}\right|$

Ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως ἡ σειρά: $b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots b_{2\eta}x^{2\eta}+\dots$ συγκλίνει ἀπολύτως ἔν τινι κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα διάφορον τοῦ μηδενός, ἑπομένως τοῦτο αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν σειράν:

$$b_0+b_2x+b_4x^2+\dots+b_{2\eta}x^\eta+\dots$$

ἧς ἡ ἀκτὶς συγκλίσεως ἔστω $\tau_1 \neq 0$. ὁπότε διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, πληροῦσαν τὴν ἀνισότητα $|x| < \tau_1$ καὶ εἰς δοθέντα τυχόντα θετικὸν ἀριθμὸν ε_ν θὰ ἀντιστοιχῇ τιμή τις τοῦ δείκτου η, ἔστω ἡ η_1, τοιαύτη ὥστε διὰ $\eta > \eta_1$ νὰ ἔχωμεν:

$$\left|b_{2\eta+2}x^{\eta+1}\right|+\dots+\left|b_{2\eta+2\mu}x^{\eta+\mu}\right| < \varepsilon_\nu$$

δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ μ. Ἐπειδὴ δέ

$$\left|\frac{b_{2\eta+2}}{2\eta+1}x^{\eta+1}\right|+\left|\frac{b_{2\eta+4}}{(2\eta+1)(2\eta+3)}x^{\eta+2}\right|+\dots\left|\frac{b_{2\eta+2\mu}}{(2\eta+1)\dots(2\eta+2\mu-1)}x^{\eta+\mu}\right|$$

$$< \frac{1}{2\eta+1}\left[\left|b_{2\eta+2}x^{\eta+1}\right|+\dots+\left|b_{2\eta+2\mu}x^{\eta+\mu}\right|\right]$$

ἕπεται ὅτι

$$\left|\frac{b_{2\eta+2}}{2\eta+1}x^{\eta+1}\right|+\dots+\left|\frac{b_{2\eta+2\mu}}{(2\eta+1)\dots(2\eta+2\mu-1)}x^{\eta+\mu}\right| < \frac{\varepsilon_\nu}{2\eta+1}$$

καὶ ἑπομένως:

$$\left|\frac{b_{2\eta+2}}{2\eta+1}x^{\eta+1}+\frac{b_{2\eta+4}}{(2\eta+1)(2\eta+3)}x^{\eta+2}+\cdots+\frac{b_{2\eta+2\mu}}{(2\eta+1)\cdots(2\eta+2\mu-1)}x^{\eta+\mu}\right|<\varepsilon_\nu$$

δι' οιανδήποτε τιμήν τοῦ μ ἔνθα ε_ν τείνει πρὸς τὸ μηδὲν μετὰ τοῦ $\dfrac{1}{\eta}$.

Ὅθεν ἐὰν τὸ σημεῖον a εἶναι ὁμαλὸν σημεῖον τῆς συναρτήσεως:

$$F(x)=b_0+b_2x+b_4x^2+\cdots+b_{2\eta}x^\eta+\cdots$$

θὰ ἔχωμεν:

$$\left|\frac{b_{2\eta+2}}{2\eta+1}a^{\eta+1}+\frac{b_{2\eta+4}}{(2\eta+1)(2\eta+3)}a^{\eta+2}+\cdots\right|<\varepsilon_\nu$$

Ἔστω νῦν ἡ σειρά:

$$(12)\qquad |f_\lambda(x)|=\left|\frac{\gamma_{2\lambda+2}}{2\lambda+1}x^{\lambda+1}\right|+\left|\frac{\gamma_{2\lambda+4}}{(2\lambda+1)(2\lambda+3)}x^{\lambda+2}\right|+\cdots$$

$$+\left|\frac{\gamma_{2\lambda+2\mu}}{(2\lambda+1)\cdots(2\lambda+2\mu-1)}x^{\lambda+\mu}\right|+\cdots$$

ἔνθα $\lambda>0$

Ὁ λόγος ταύτης $V_{\lambda+\mu}$ εἶναι:

$$V_{\lambda+\mu}=\frac{1}{2\lambda+2\mu-1}\left|\frac{\gamma_{2\lambda+2\mu}}{\gamma_{2\lambda+2\mu-2}}x\right|$$

Ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι ἡ σειρά:

$$\sum_{\eta=1}^{\infty}\frac{|\gamma_{2\eta}|}{1.3.5\ldots(2\eta-1)}|x^\eta|$$

συγκλίνει ἔν τινι κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα διάφορον τοῦ μηδενός, ἤτοι ὁ λόγος:

$$\frac{1}{2\eta-1} \; \frac{|\gamma_{2\eta}|}{|\gamma_{2\eta-2}|} \, |x| < h < 1$$

διά πάσας τάς τιμάς τοῦ x τάς πληρούσας τήν ἀνισότητα $|x| < r_2$ (ἔνθα r_2 ἡ ἀκτίς συγκλίσεως τῆς $Q(x)=\sum C_{2\eta} x^{\eta}$) ἀπό τινος τιμῆς τοῦ η, ἔστω τῆς η_1 καί ἐφεξῆς:

Ἄρα διά τάς αὐτάς τιμάς τοῦ x καί διά τάς τιμάς τοῦ $\lambda \geqq \eta_1$ θά ἔχωμεν:

$$V_{\lambda+\mu} < h < 1$$

διά πᾶσαν αὐθαίρετον θετικήν τιμήν τοῦ δείκτου μ.

Ἑπομένως ἐάν $|a| < r_2$ ἤτοι ἐάν ἡ συνάρτησις $Q(x)=\sum\limits_{\eta=1}^{\infty} C_{2\eta} x^{\eta}$ εἶναι ὁλόμορφος διά $x=a$ θά ἔχωμεν:

$$\frac{1}{2\lambda+2\mu-1} \; \frac{|\gamma_{2\lambda+2\mu}|}{|\gamma_{2\lambda+2\mu-1}|} \, |a| < h < 1 \quad \text{διά } \lambda \geqq \eta$$

Ἄρα, ἐάν $f_\lambda(a)$ παριστᾷ τήν τιμήν τῆς σειρᾶς (12) διά $x=a$ συνάγομεν ὅτι ἡ $|f_\lambda(a)|$ μένει πεπερασμένη διά πάσας τάς τιμάς τοῦ λ τάς πληρούσας τήν σχέσιν: $\lambda \geqq \eta_1$

Λέγω νῦν ὅτι ἡ ἀκολουθία:

$$(13) \quad \left|\sqrt[\eta]{W_\eta(a)}\right| \cdot \left|\sqrt[\eta+1]{W_{\eta+1}(a)}\right| \cdot \;\cdot\;\cdot \left|\sqrt[2\eta+1]{W_{2\eta+1}(a)}\right| \cdot \cdot \cdot$$

$$\ldots \text{ἔνθα } W_{2\eta+1}(a) = |f_{2\eta+1}(a)|$$

εἶναι περατωμένη. Τῷ ὄντι ἔστω θετικός τις ἀριθμός $m>1$ λέγομεν ὅτι ὑπάρχει ἀντίστοιχος τιμή τοῦ η ἔστω $\eta' > \eta_1$ τοιαύτη ὥστε διά τιμάς τοῦ $\eta > \eta'$ νά ἔχωμεν:

$$\left| \sqrt[2\eta+\mu]{W_{2n+\mu}(a)} \right| < m$$

Διότι ἔστω ὅτι:

$$(14) \qquad \left| \sqrt{W_{2n+\mu}(a)} \right| \geqq m$$

τότε:

$$\left| f_{2\eta+\mu}(a) \right| \geqq m^{2\eta+\mu}$$

ὅπερ ἄτοπον, διότι $\text{όρ}\, m^{2n+4} = \infty,\ \eta \to \infty$ ἐνῷ ἡ $\left| f_{2\eta+\mu}(a) \right|$ ἀπεδείχθη ὅτι μένει πεπερασμένη διά πᾶσαν τιμήν τοῦ $\eta > \eta_1$.

Ἄρα ἀπό τινος στιγμῆς καί πέραν δέν θά ὑπάρχει οὐδεμία τιμή τοῦ η δι' ἥν θά ἰσχύῃ ἡ σχέσις (14), συνεπῶς ἡ ἀκολουθία (13) εἶναι περατωμένη. Ὁμοίως καί ἡ ἀκολουθία

$$(15) \qquad \left| \sqrt[\eta]{\varepsilon_\eta + \kappa f_\eta(a)} \right| \left| \sqrt[\eta+1]{\varepsilon'_{\eta+1} + \kappa f_{\eta+1}(a)} \right| \cdots$$

ἔνθα ε'_η τείνει πρός τό μηδέν μετά τοῦ $\frac{1}{\eta}$, εἶναι περατωμένη. Ἔστω M' τό ἀνώτερον πέρας τῆς (15) ὁπότε θά ἔχωμεν:

$$\sqrt[2\eta+1]{r_{2\eta+1}} \leqq \frac{1}{\sqrt{a}} \sqrt[2\eta+1]{\varepsilon'_{2\eta+1} + \kappa f_{2\eta+1}(a)} \quad \frac{M}{\sqrt{a}}$$

Ἤτοι ὑπό τάς ἀνωτέρω ὑποθέσεις ἡ σειρά (5) συγκλίνει ἔν τινι κύκλῳ ἀκτῖνος διαφόρου τοῦ μηδενός.

Εἰς τά ἀνωτέρω ὑπεθέσαμεν ὅτι <u>$\nu = 2\eta + 1$</u>. ἔστω νῦν ὅτι τό ν εἶναι ἄρτιον. ἤτοι $\nu = 2\eta$ ὁπότε:

$$\left|\sqrt[2\eta]{\gamma_{2\eta}}\right| = \left|\frac{1}{a^{1/2}}\sqrt[2\eta]{2.4.6\cdots(2\eta-2)\left[b_1 + \frac{b_3}{2}a + \frac{b_5}{2.4}a^2 + \cdot \frac{b_{2\eta-1}}{2.4(2\eta-2)}a^{\eta-1} + \kappa\left[\gamma_1 + \frac{\gamma_1}{2}a + \cdots + \cdots \frac{\gamma_{2\eta-1}}{2.4\cdots(2\eta-2)}a^{\eta-1}\right]\right]}\right|$$

Ὁμοίως καί ἐνταῦθα ἀποδεικνύεται ὅτι, ἵνα μή $\left|\sqrt[2\eta]{\gamma_{2\eta}}\right|$ ἔχῃ ἀνώτερον ὅριον τό ἄπειρον ἀρκεῖ ὁ ἀριθμός a ἀφ' ἑνός μέν νά εἶναι ρίζα τῶν συναρτήσεων:

$$f_1(x) = b_1 + \frac{b_3}{2}x + \frac{b_5}{2.4}x^2 + \cdots + \frac{b_{2\eta-1}}{2.4.6\cdots(2\eta-2)}x^{\eta-1} + \cdots$$

$$\Gamma_1(x) = \gamma_1 + \frac{\gamma_3}{2}x + \frac{\gamma_5}{2.4}x^2 + \cdots + \frac{\gamma_{2\eta-1}}{2.4.6\cdots(2\eta-2)}x^{\eta-1} + \cdots$$

ἀφ' ἑτέρου δέ αἱ συναρτήσεις:

$$F_1(x) = b_1 + b_3 x + b_5 x^2 + \cdots$$

$$Q_1(x) = c_1 + c_3 x + c_5 x^2 + \cdots$$

νά εἶναι ὁμαλαί διά $x = a$.

<u>Ἡ διαφορική ἐξίσωσις (1) δέχεται ὁλοκλήρωμα ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενός καί μηδενιζόμενον διά τήν τιμήν ταύτην, ὅταν ἡ παράμετρος a εἶναι κοινή ρίζα τῶν συναρτήσεων</u>

$$f(x) = b_0 + \frac{b_2}{1}x + \frac{b_4}{1.3}x^2 + \cdot \frac{b_{2\eta}}{1.3.5\cdots(2\eta-1)}x^\eta + \cdots$$

$$F_1(x) = b_1 + \frac{b_3}{2}x + \frac{b_5}{2.4} + \cdots \frac{b_{2\eta-1}}{2.4.6\ldots(2\eta-2)} x^\eta + \cdots$$

$$\Gamma(x) = \frac{\gamma_2}{1} + \frac{\gamma_4}{1.3}x^2 \cdots + \cdots \frac{\gamma_{2n}}{1.3.5\ldots(2\eta-1)} x^\eta + \cdots$$

$$\Gamma_1(x) = \gamma_1 + \frac{\gamma_3}{2}x + \frac{\gamma_5}{2.4}x^2 + \cdots \frac{\gamma_{2n-1}}{2.4.6\ldots(2\eta-2)} x^{\eta-1} + \cdots$$

<u>Ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ συναρτήσεις:</u>

$$F(x) = \sum_{\eta=0}^{\infty} b_{2n} x^\eta \qquad F_1(x) = \sum_{\eta=0}^{\infty} b_{2\eta+1} x^n .$$

$$Q(x) = \sum_{\eta=1}^{\infty} c_{2\eta} x^\eta \qquad \text{καὶ} \qquad Q_1(x) = \sum_{\eta=0}^{\infty} c_{2\eta+1} x^\eta$$

<u>εἶναι ὁλόμορφοι διὰ $x = a$.</u>

Ἐν τοῖς ἀνωτέρω $b_0 , b_1 , b_2 \ldots$ παριστῶσι τοὺς συντελεστὰς τοῦ ἀναπτύγματος τῆς ἐν τῇ διαφορικῇ ἐξισώσει (1) συναρτήσεως $\varphi(x)$ $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \cdots$ οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς συναρτήσεως ἥτις εἶναι ὁλοκλήρωμα τῆς (1) καὶ $c_1\ c_2\ c_3 \ldots$ οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς συναρτήσεως τῆς ὁριζομένης ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως:

$$|a|\ y = x^2 y + x\,\Phi(x) + |\kappa|\ xy$$

ἔνθα
$$\Phi(x) = |b_0| + |b_1| x + |b_2| x^2 + \cdots$$

III

Ἔστω τέλος ἡ διαφορική ἐξίσωσις:

$$x^2 \frac{dy}{dx} = by + xA(x) + \kappa y^2$$

ἔνθα β καί Κ σταθεροί ἀριθμοί $\neq 0$ καί $A(x)$ ὁλόμορφος συνάρτησις ἔν τινι κύκλῳ ἔχοντι κέντρον τήν ἀρχήν τῶν συν-τεταγμένων καί ἀκτῖνα διάφορον τοῦ μηδενός.

Θά ζητήσωμεν νά προσδιορίσωμεν τάς παραμέτρους β καί Κ ὥστε ἡ διαφορική ἐξίσωσις (1) νά δέχηται λύσιν ὁλό-μορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ σημείου $x=0$ καί μηδενιζομένην διά τήν τιμήν ταύτην.

Ἔστω:

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \qquad + a_\nu x^\nu + \dots$$

τό εἰς σειράν τοῦ Taylor ἀνάπτυγμα τῆς ὁλομόρφου συναρτή-σεως $A(x)$ καί

$$y = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \dots \gamma_\nu x^\nu + \dots$$

ἡ τυπική λύσις τῆς ἐξισώσεως (1). Θά ζητήσωμεν πρῶτον νά εὕρω-μεν σχέσεις μεταξύ τῶν συντελεστῶν $b, \kappa, a_0, a_1, a_2 \dots a_\nu \dots \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \dots \gamma_\nu$ ἐξ ὧν θά προσδιορίσωμεν τούς συντελεστάς $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \dots \gamma_\nu$ τῆς σειρᾶς $\Gamma(x)$. Πρός τοῦτο θά μεταχειρισθῶμεν τήν μέθοδον τῶν προσδιοριστέων συντελεστῶν.

Ἀντικαθιστῶντες ὅθεν εἰς τήν ἐξίσωσιν (1) τά $y, \frac{dy}{dx}$,

$A(x)$ διά τῶν ἴσων αὐτοῖς συναρτήσεων τοῦ x λαμβάνομεν:

$$x^2\left[\gamma_1+2\gamma_2 x+3\gamma_3 x^2+4\gamma_4 x^3+\cdot\cdot+\nu\gamma_\nu x^{\nu-1}+\cdot\right]=b\left[\gamma_1 x+\gamma_2 x^2+\right.$$

$$\left.\gamma_3 x^3+\cdot\cdot+\gamma_\nu x^\nu+\cdot\right]+\kappa\left[\gamma_1^2 x^2+\gamma_2^2 x^4+\cdot\cdot+\gamma_\nu^2 x^{2\nu}+\right.$$

$$+2\gamma_1\gamma_2 x^3+2\gamma_1\gamma_3 x^4+\cdot\cdot+2\gamma_1\gamma_\nu x^{\nu+1}+2\gamma_2\gamma_3 x^5+\cdot\cdot+2\gamma_2\gamma_\nu x^{\nu+2}+$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\left.+2\gamma_{\nu-1}\gamma_\nu x^{2\nu-1}+\cdot\right]+x\left[a_0+a_1 x+a_2 x^2+\cdot\cdot\cdot+a_\nu x^\nu+\cdot\cdot\right]$$

Ἐξισοῦντες τούς συντελεστάς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x λαμβάνομεν:

$$
\begin{aligned}
0 &= b\gamma_1 + a_0\\
\gamma_1 &= b\gamma_2 + \kappa\gamma_1^2 + a_1\\
2\gamma_2 &= b\gamma_3 + 2\kappa\gamma_1\gamma_2 + a_2\\
3\gamma_3 &= b\gamma_4 + \kappa\gamma_2^2 + 2\kappa\gamma_1\gamma_3 + a_3\\
4\gamma_4 &= b\gamma_5 + 2\kappa\left[\gamma_1\gamma_4+\gamma_2\gamma_3\right] + a_4\\
5\gamma_5 &= b\gamma_6 + \kappa\gamma_3^2 + 2\kappa\left[\gamma_1\gamma_5+\gamma_2\gamma_4\right] + a_5\\
6\gamma_6 &= b\gamma_7 + 2\kappa\left[\gamma_1\gamma_6+\gamma_2\gamma_5+\gamma_3\gamma_4\right] + a_6\\
7\gamma_7 &= b\gamma_8 + \kappa\gamma_4^2 + 2\kappa\left[\gamma_1\gamma_7+\gamma_2\gamma_6+\gamma_3\gamma_5\right] + a_7\\
8\gamma_8 &= b\gamma_9 + 2\kappa\left[\gamma_1\gamma_8+\gamma_2\gamma_7+\gamma_3\gamma_6+\gamma_4\gamma_5\right] + a_8\\
9\gamma_9 &= b\gamma_{10} + \kappa\gamma_5^2 + 2\kappa\left[\gamma_1\gamma_9+\gamma_2\gamma_8+\gamma_3\gamma_7+\gamma_4\gamma_6\right] + a_9\\
10\gamma_{10} &= b\gamma_{11} + 2\kappa\left[\gamma_1\gamma_{10}+\gamma_2\gamma_3+\gamma_3\gamma_8+\gamma_4\gamma_7+\gamma_5\gamma_6\right] + a_{10}
\end{aligned}
$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

Ἐάν λάβωμεν χωριστά τάς σχέσεις αἵτινες μᾶς δίδουσι τούς συντελεστάς τῶν ἀρτίων δυνάμεων τοῦ x (τῆς σειρᾶς $\Gamma(x)$) καί τούς συντελεστάς τῶν περιττῶν δυνάμεων τοῦ x θά ἔχωμεν:

$$\gamma_1 = b\gamma_2 + \kappa\gamma_1^2 + a_1$$

$$3\gamma_3 = b\gamma_4 + \kappa\gamma_2^2 + 2\kappa\gamma_1\gamma_3 + a_3$$

$$5\gamma_5 = b\gamma_6 + \kappa\gamma_3^2 + 2\kappa\left[\gamma_1\gamma_5 + \gamma_2\gamma_4\right] + a_5$$

$$7\gamma_7 = b\gamma_8 + \kappa\gamma_4^2 + 2\kappa\left[\gamma_1\gamma_7 + \gamma_2\gamma_6 + \gamma_3\gamma_5\right] + a_7$$

. . . .

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ἡ σχέσις ἐξ ἧς θά πορισθῶμεν τόν συντελεστήν $\gamma_{2\eta}$ εἶναι:

$$(2\eta-1)\gamma_{2\eta-1} = b\gamma_{2\eta} + \kappa\gamma_\eta^2 + 2\kappa\left[\gamma_1\gamma_{2\eta-1} + \gamma_2\gamma_{2\eta-2} + \cdots + \cdots \gamma_{\eta-1}\gamma_{\eta+1}\right] + a_{2\eta-1}$$

Λύοντες ὡς πρός τούς συντελεστάς $\gamma_2 \cdot \gamma_4 \cdot \gamma_6 \cdot \cdots$ λαμβάνομεν:

$$\gamma_2 = -\frac{1}{6}\left[a_1 + \kappa\gamma_1^2 - \gamma_1\right]$$

$$\gamma_4 = -\frac{1}{6}\left[a_3 + \kappa\gamma_2^2 + 2\kappa\gamma_1\gamma_3 - 3\gamma_3\right]$$

$$\gamma_6 = -\frac{1}{6}\left[a_5 + \kappa\gamma_3^2 + 2\kappa\left[\gamma_1\gamma_5 + \gamma_2\gamma_4\right] - 5\gamma_5\right]$$

$$\gamma_8 = -\frac{1}{6}\left[a_6 + \kappa\gamma_4^2 + 2\kappa\left[\gamma_1\gamma_7 + \gamma_2\gamma_6 + \gamma_3\gamma_5\right] - 7\gamma_7\right]$$

. . . .

. . . .

$$\gamma_{2\eta} = -\frac{1}{6\gamma}\Big[a_{2\eta-1} + \kappa\gamma_\eta^2 + 2\kappa\big[\gamma_1\gamma_{2\eta-1} + \gamma_2\gamma_{2\eta-2} + \cdots + \gamma_{\eta-2}\gamma_{\eta+2} + \gamma_{\eta-1}\gamma_{\eta+1}\big] - (2\eta-1)\,\gamma_{2\eta-1}\Big]$$

Ὁμοίως ἔχομεν τάς σχέσεις:

$$0 = \beta\gamma_1 + a_0$$

$$2\gamma_2 = \beta\gamma_3 + 2\kappa\gamma_1\gamma_2 + a_2$$

$$4\gamma_4 = \beta\gamma_5 + 2\kappa\big[\gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3\big] - a_4$$

$$6\gamma_6 = \beta\gamma_7 + 2\kappa\big[\gamma_1\gamma_6 + \gamma_2\gamma_5 + \gamma_3\gamma_4\big] + a_6$$

$$8\gamma_8 = \beta\gamma_9 + 2\kappa\big[\gamma_1\gamma_8 + \gamma_2\gamma_7 + \gamma_3\gamma_6 + \gamma_4\gamma_5\big] - a_8$$

. . . .

. . . .

$$2\eta\gamma_{2\eta} = \beta\gamma_{2\eta+1} + 2\kappa\big[\gamma_1\gamma_{2\eta} + \gamma_2\gamma_{2\eta-1} + \gamma_3\gamma_{2\eta-2} \pm \cdots + \gamma_\eta\gamma_{\eta+1}\big] + a_{2\eta}$$

Λύοντες ἤδη ὡς πρός τούς συντελεστάς $\gamma_1 \cdot \gamma_3 \cdot \gamma_5 \cdots \gamma_{2\eta+1}$ λαμβάνομεν:

$$\gamma_1 = -\frac{1}{\beta}\,a_0$$

$$\gamma_3 = -\frac{1}{\beta}\big[a_2 + 2\kappa\gamma_1\gamma_2 - 2\gamma_2\big]$$

$$\gamma_5 = -\frac{1}{\beta}\Big[a_4 + 2\kappa\big[\gamma_1\gamma_4 + \gamma_2\gamma_3\big] - 4\gamma_4\Big]$$

$$\gamma_7 = -\frac{1}{\beta}\Big[a_6 + 2\kappa\big[\gamma_1\gamma_6 + \gamma_2\gamma_5 + \gamma_3\gamma_4\big] - 6\gamma_6\Big]$$

. . . .

. . . .

$$\gamma_{2\eta+1} = -\frac{1}{\beta}\Big[a_{2\eta} + 2\kappa\big[\gamma_1\gamma_{2\eta} + \gamma_2\gamma_{2\eta-1} + \cdots + \gamma_\eta\gamma_{\eta+1}\big] - 2\eta\,\gamma_{2\eta}\Big]$$

Οὕτω ἔχομεν:

(1) $$\gamma_{2\eta} = -\frac{1}{\beta}\left[a_{2\eta-1} + \kappa\gamma_\eta^2 - 2\kappa\left[\gamma_1\gamma_{2\eta-1} + \gamma_2\gamma_{2\eta-2} + \cdots + \cdots \gamma_{\eta-1}\gamma_{\eta+1}\right] - (2\eta-1)\gamma_{2\eta-1}\right]$$

(2) $$\gamma_{2\eta+1} = -\frac{1}{\beta}\left[a_{2\eta} + 2\kappa\left[\gamma_1\gamma_{2\eta} + \gamma_2\gamma_{2\eta-1} + \cdots + \gamma_\eta\gamma_{\eta+1}\right] - 2\eta\gamma_{2\eta}\right]$$

Ἐάν θέσωμεν νῦν:

$$P_{2\eta+1} = \gamma_1\gamma_{2\eta} + \gamma_2\gamma_{2\eta-1} + \cdots + \gamma_\eta\gamma_{\eta+1}$$

$$P_{2\eta} = \gamma_1\gamma_{2\eta-1} + \gamma_2\gamma_{2\eta-2} + \cdots + \gamma_{\eta-1}\gamma_{\eta+1}$$

. . . .

. . . .

$$P_3 = \gamma_1\gamma_2$$

Ὅτε ἡ σχέσις (2) γράφεται:

$$\gamma_{2\eta+1} = -\frac{1}{\beta}\left[a_{2\eta} + 2\kappa P_{2\eta+1} - 2\eta\gamma_{2\eta}\right]$$

ἀλλ' ἐκ τῆς (1) ἔχομεν:

$$\gamma_{2\eta} = -\frac{1}{\beta}\left[a_{2\eta-1} + \kappa\gamma_\eta^2 + 2\kappa P_{2\eta} - (2\eta-1)\gamma_{2\eta-1}\right]$$

ὅθεν:

$$\gamma_{2\eta+1} = -\frac{1}{\beta^2}\left[a_{2\eta}\beta + 2\eta\, a_{2\eta-1} + \kappa\cdot 2\eta\,\gamma_\eta^2 + 2\kappa\left[P_{2\eta+1}\beta - 2\eta P_{2\eta}\right] - 2\eta(2\eta-1)\gamma_{2\eta-1}\right]$$

ἀλλὰ καὶ

$$\gamma_{2\eta-1} = -\frac{1}{b}\left[a_{2\eta-2} + 2\kappa\, P_{2\eta-1} - (2\eta-2)\,\gamma_{2\eta-2}\right]$$

συνεπῶς

$$\gamma_{2\eta+1} = -\frac{1}{b^3}\Big[a_{2\eta}b^2 + 2\eta a_{2\eta-1}b + 2\eta(2\eta-1)\,a_{2\eta-2} + 2\kappa\,\Big[P_{2\eta+1}\,b^2 -$$

$$+ 2\eta P_{2\eta}b + 2\eta(2\eta-1)\,P_{2\eta-1}\Big] + \kappa - 2\eta\,\gamma_\eta^2\,b - 2\eta(2\eta-1)(2\eta-2)\gamma_{2\eta-2}\Big]$$

Ἐργαζόμενοι οὕτω λαμβάνομεν:

$$\gamma_{2\eta+1} = -\frac{1}{b^{2\eta-1}}\Big[a_{2\eta}\,b^{2\eta-2} + 2\eta\,a_{2\eta-1}\,b^{2\eta-3} + \cdots + 2\eta(2\eta-1)\cdots 4.3.a_2 +$$

$$+ 2\kappa\Big[P_{2\eta+1}\quad b^{2\eta-2} + 2\eta P_{2\eta}b^{2\eta-3} + \cdots + 2\eta(2\eta-1)\cdots 4.3.P_3\Big] +$$

$$+ \kappa\Big[2\eta\gamma_\eta^2\,b^{2\eta-3} + 2\eta(2\eta-1)(2\eta-2)\gamma_{\eta-1}^2\,b^{2\eta-3} + 2\eta\cdots(2\eta-4)\,\gamma_{\eta-2}^2\,b^{2\eta-7} +$$

$$+ 2\eta\cdots 4\gamma_2^2 b\Big] - 2\eta(2\eta-1)\cdots 4.3.2\,\gamma_2\Big]$$

ἀλλὰ

$$\gamma_2 = -\frac{1}{b}\left[a_1 + \kappa\gamma_1^2 - \gamma_1\right]$$

ὅθεν

$$\gamma_{2\eta+1} = -\frac{1}{b^{2\eta}}\Big[a_{2\eta}\,b^{2\eta-1} + 2\eta a_{2\eta-1}\,b^{2\eta-2} + \cdots + 2\eta(2\eta-1)\cdots$$

$$3a_2\,b + 2\eta\cdots 3.2.a_1 + 2\kappa\Big[P_{2\eta+1}\,b^{2\eta-1} + 2\eta\,P_{2\eta}b^{2\eta-2} + \cdots + 2\eta(2\eta-1)$$

$$\cdots 3\,P_3 b\Big] + \kappa\Big[2\eta\gamma_\eta^2 b^{2\eta-2} + 2\eta(2\eta-1)(2\eta-2)\,\gamma_{\eta-1}^2\,b^{2\eta-4} + \cdots + 2\eta$$

$$3.2.\gamma_1^2\Big] - 2\eta(2\eta-1)\cdots 3.2.1\,\gamma_1\Big]$$

ή τέλος, εάν αντί τού γ_1 θέσωμεν τό ίσον του $-\frac{a_0}{b}$ λαμβάνομεν:

$$\gamma_{2\eta+1} = -\frac{1}{b^{2\eta+1}}\Big[(2\eta)!\,a_0 + 2.3.4\ldots 2\eta a_1 b + 3.4\ldots 2\eta a_2 b^2 + \ldots$$

$$+ a_{2\eta} b^{2\eta} + \kappa\Big[2.3.4\ldots 2\eta\gamma_1^2 b + 4.5\ldots 2\eta\gamma_2^2 b^3 + \ldots$$

$$+ 2\eta\gamma_\eta^2 b^{2\eta-1}\Big] + 2\kappa\Big[3.4.5\ldots 2\eta P_3 b^2 + 4.5\ldots 2\eta P_4 b^3 +$$

$$\ldots + 2\eta P_{2\eta} b^{2\eta-1} + P_{2\eta+1} b^{2\eta}\Big]\Big]$$

ή

$$(4)\quad \gamma_{2\eta+1} = -\frac{1.2.3\ldots 2\eta}{b^{2\eta+1}}\Big[a_0 + \frac{a_1}{1}b + \frac{a_2}{1.2}b^2 + \ldots + \frac{a_{2\eta}}{1.2.3\ldots 2\eta}b^{2\eta} +$$

$$\kappa\Big[\frac{\gamma_1^2}{1}b + \frac{\gamma_2^2}{1.2.3}b^3 + \ldots + \frac{\gamma_\eta^2}{1.2.3\ldots(2\eta-1)}b^{2\eta-1}\Big] +$$

$$2\kappa\Big[\frac{P_3}{12}b^2 + \frac{P_\eta}{1.2.3}b^3 + \ldots + \frac{P_{2\eta+1}}{1.2.3\ldots 2\eta}b^{2\eta}\Big]\Big]$$

Ομοίως εύρίσκομεν:

$$(5)\quad \gamma_{2\eta} = -\frac{1.2.3\ldots(2\eta-1)}{b^{2\eta}}\Big[a_0 + \frac{a_1}{1}b + \frac{a_2}{12}b^2 + \ldots + \frac{a_{2\eta-1}}{1.2.(2\eta-1)}b^{2\eta-1} +$$

$$\kappa\Big[\frac{\gamma_1^2}{1}b + \frac{\gamma_2^2}{1.2.3}b^3 + \ldots + \frac{\gamma_\eta^2}{1.2.3\ldots(2\eta-1)}b^{2\eta-1}\Big] +$$

$$+ 2\kappa\Big[\frac{P_3}{1.2}b^2 + \frac{P_4}{1.2.3}b^3 + \ldots + \frac{P_{2\eta}}{1.2.3\ldots(2\eta-1)}b^{2\eta-1}\Big]\Big]$$

ή

$$(6)\quad \gamma_{2\eta+1} = -\frac{1.2.3\ldots 2\eta}{b^{2\eta+1}}\Big[f_{2\eta}(b) + \kappa\,\Gamma_\eta(b) + 2\kappa\,Q_{2\eta}(b)$$

$$(7) \quad \gamma_{2\eta} = -\frac{1.2.3\ldots(2\eta-1)}{\beta^{2\eta}}\left| f_{2\eta-1}(\beta) + \kappa\,\Gamma_\eta(\beta) + 2\kappa\, Q_{2\eta-1}(\beta)\right|$$

ἔνθα

$$f_{2\eta}(\beta) = a_0 + \frac{a_1}{1}\beta + \frac{a_2}{12}\beta^2 + \ldots \frac{a_{2\eta}}{1.2.3\ldots 2\eta}\beta^{2\eta}$$

$$\Gamma_\eta(\beta) = \frac{\gamma_1^2}{1}\beta + \frac{\gamma_2^2}{1.2.3}\beta^3 + \ldots \frac{\gamma_\eta^2}{1.2.3\ldots(2\eta-1)}\beta^{2\eta-1}$$

$$Q_{2\eta}(\beta) = \frac{P_3}{12}\beta^2 + \frac{P_4}{1.2.3}\beta^3 + \ldots \frac{P_{2\eta+1}}{1.2.3\ldots 2\eta}\beta^{2\eta}$$

ἄς γράψωμεν νῦν τήν διαφ. ἐξίσωσιν οὕτω:

$$\beta y = x^2 y' - x\,A(x) - \kappa y^2$$

καί ἄς ἀντικαταστήσωμεν πάντας τούς συντελεστάς τοῦ δευτέρου μέλους ὑπό τῶν μέτρων των ὅτε λαμβάνομεν νέαν διαφ. ἐξίσωσιν:

$$(8) \quad |\beta|\, y = x^2 y' + x\,A_1(x) + |\kappa|\, y^2$$

ἔνθα

$$A_1(x) = |a_0| + |a_1|\,x + |a_2|\,x^2 + \ldots + |a_\nu|\,x^\nu + \ldots$$

ἔστω δέ

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_\nu x^\nu + \ldots$$

ἡ τυπικῶς τήν (8) ἐπαληθεύουσα σειρά ὅτε δι᾽ ἀντικαταστάσεως εἰς τήν (8) καί διά τῆς ἐξισώσεως τῶν συντελεστῶν τῶν ἴσων δυνάμεων, λαμβάνομεν τάς σχέσεις :

$$C_1 = \frac{1}{|\beta|}\,|a_0|$$

$$C_2 = \frac{1}{|\beta|}\left[|a_1| + |\kappa|\; c_1^2 + c_1\right]$$

$$(9)\qquad C_3 = \frac{1}{|b|}\left[|a_2| + 2|\kappa|\ c_1c_2 + 2c_2\right]$$

$$C_4 = \frac{1}{|b|}\left[|a_3| + |\kappa|\ c_2^2 + 2|\kappa|\ c_1c_2 - 3c_3\right]$$

. . . .

. . . .

$$C_{2\eta} = \frac{1}{|b|}\left[|a_{2\eta-1}| + |\kappa|\ C_\eta^2 + 2.|\kappa|\ \left[c_1c_{2\eta-1} + c_2c_{2\eta-2}\right.\right.$$

$$\left.\left. + c_\eta c_{\eta+1}\right] + (2\eta-1)c_{2\eta-1}\right]$$

$$C_{2\eta+1} = \frac{1}{|b|}\left[|a_{2\eta}| + 2|\kappa|\ \left[c_1c_{2\eta} + c_2 c_{2\eta-1} + \dots\right.\right.$$

$$\left.\left. + c_\eta c_{\eta+1}\right] + 2\eta c_{2\eta}\right]$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) (2) καί (9) ἔπεται ὅτι :

$$|\gamma_{2\eta}| \leqq C_{2\eta}\ ,\quad |\gamma_{2\eta+1}| \leqq C_{2\eta+1}$$

Ἂς συγκρίνωμεν νῦν τούς συντελεστάς $C_1, C_2 . C_3 \dots$ μέ τούς συντελεστάς $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3 \dots \delta_\nu$ τῆς σειρᾶς

$$\omega(x) = \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \delta_3 x^3 + \dots + \delta_\nu x^\nu + \dots$$

ἔνθα $\omega(x)$ συνάρτησις ὁλόμορφος ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενός, μηδενιζομένη διά $x = 0$ καί πληροῦσα τήν ἐξίσωσιν:

$$(10)\qquad |b|\ y_1 = xy + xA_1 + |\kappa|\ y^2$$

Αἱ σχέσεις δι' ὧν προσδιορίζονται οἱ συντελεσταί $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3 \dots$ λαμβανόμεναι διά τῆς ἀντικαταστάσεως $y = \omega(x)$ ἐν τῇ (10) καί διά τῆς ἐξισώσεως τῶν συντελεστῶν τῶν ἴσων δυνάμεων

εἶναι :

$$\delta_1 = \frac{1}{|b|}|a_0|$$

$$\delta_2 = \frac{1}{|b|}\Big[|a_1| + |\kappa|\ \delta_1^2 + \delta_1\Big]$$

$$\delta_3 = \frac{1}{|b|}\Big[|a_2| + 2\ |\kappa|\ \delta_1\delta_2 + \delta_2\Big]$$

$$\delta_4 = \frac{1}{|b|}\Big[|a_3| + |\kappa|\ \delta_2^2 + 2\ |\kappa|\ \delta_1\ \delta_3 + \delta_3\Big]$$

. . . .

. . . .

$$\delta_{2\eta} = \frac{1}{|b|}\Big[|a_{2\eta-1}| + |\kappa|\ \delta_\eta^2 + 2|\kappa|\Big[\delta_1\ \delta_{2\eta-1} + \delta_2\ \delta_{2\eta-2} \cdot \delta_{\eta-1}\ \delta_{\eta+1}\Big] - \delta_{2\eta-1}\Big]$$

$$\delta_{2\eta+1} = \frac{1}{|b|}\Big[|a_{2\eta}| + 2|\kappa|\ \Big[\delta_1\ \delta_{2\eta} + \delta_2\ \delta_{2\eta-1} + \cdots \delta_\eta\ \delta_{\eta+1}\Big] + \delta_{2\eta}\Big]$$

Συγκρίνοντες νῦν τάς σχέσεις (9) καί (11) λαμβάνομεν:

$$c_1 = \delta_1$$

$$c_2 = \delta_2$$

$$c_3 < \frac{1.2}{|b|}\Big[|a_3| + 2\ |\kappa|\ \delta_1\ \delta_2 + \delta_2\Big] = 1.2\ \delta_3$$

$$c_4 < \frac{1.2.3}{|b|}\Big[|a_3| + |\kappa|\ \delta_2^2 + 2\ |\kappa|\ \delta_1\delta_2 + \delta_3\Big] = 1.2.3\ \delta_4$$

$$c_5 < \frac{1.2.3.4}{|b|}\Big[|a_4| + 2\ |\kappa|\Big[\delta_1\delta_4 + \delta_2\delta_3\Big] + \delta_4\Big] = 1.2.3.4\ \delta_5$$

. . . .

. . . .

$$c_{2\eta} < \frac{1.2.3\cdots(2\eta-1)}{|b|}\Big[|a_{2\eta-1}| + |\kappa|\ \delta_\eta^2 + 2|\kappa|\Big[\delta_1\ \delta_{2\eta-1} + \delta_2\ \delta_{2\eta-2} +$$

$$\cdot + \delta_{\eta-1}\ \delta_{\eta+1}\Big] + \delta_{2\eta-1}\Big]$$

$$C_{2\eta+1} < \frac{1.2.3\ldots 2\eta}{|\beta|}\Big[|\alpha_{2\eta}| + 2|\kappa|\,[\delta_1\delta_{2\eta} + \delta_2\delta_{2\eta-1} + \ldots$$
$$+ \ldots \delta_\eta\delta_{\eta+1}] + \delta_{2\eta}\Big]$$

ἤ

$$C_{2\eta} < 1.2.3\ldots(2\eta-1)\,\delta_{2\eta}$$

$$C_{2\eta+1} < 1.2.3\ldots 2\eta\,\delta_{2\eta+1}$$

ἄρα καί

$$(12)\qquad \begin{aligned} |\gamma_{2\eta}| &< 1.2.3\ldots(2\eta-1)\,\delta_{2\eta} \\ |\gamma_{2\eta+1}| &< 1.2.3\ldots 2\eta\,\delta_{2\eta+1} \end{aligned}$$

Ἐξετάσωμεν νῦν τό $\left|\sqrt[\nu]{\gamma_\nu}\right|$ ὅταν τό ν τείνῃ πρός τό ἄπειρον. Ἐκ τῶν σχέσεων (6) καί (7) εὐκόλως φαίνεται ὅτι τό μέτρον τῆς νυοστῆς ρίζης τοῦ νυοστοῦ ὅρου τῆς σειρᾶς:

$$(13)\qquad y = \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \gamma_3 x^3 + \ldots + \gamma_\nu x^\nu + \ldots$$

ἥτις τυπικῶς ἐπαληθεύει τήν διαφ. ἐξίσωσιν (1) τείνει ἐν γένει εἰς τό ἄπειρον μετά τοῦ ν πλήν ὅμως ὀλιγώτερον ταχέως ἀπό $\left|\sqrt[\nu]{1.2.3\ldots(\nu-1)}\right|$ ὡς δεικνύουσιν αἱ σχέσεις (12). Θά ζητήσωμεν ὅθεν νά εὕρωμεν ὑπό τίνας συνθήκας ἤ διά ποίας τιμάς τῆς παραμέτρου β ἡ ἀκολουθία:

$$|\gamma_1|,\ \left|\sqrt{\gamma_2}\right|,\ \left|\sqrt[3]{\gamma_3}\right|,\ \ldots\ \left|\sqrt[\nu]{\gamma_\nu}\right|$$

δέν ἔχει ἀνώτερον ὅριον τό ἄπειρον ὅταν τό ν τείνῃ πρός τό ἄπειρον.

Ἔστωσαν δέ αἱ σειραί :

$$(14)\quad f(x) = a_0 + \frac{a_1}{1}x + \frac{a_2}{1.2}x^2 + \frac{a_3}{1.2.3}x^3 + \cdots \frac{a_{2\eta}}{1.2.3\cdots 2\eta}x^{2\eta} + \cdots$$

$$(15)\quad \Gamma(x) = \frac{\gamma_1^2}{1}x + \frac{\gamma_2^2}{1.2.3}x^3 + \cdots \cdots \frac{\gamma_\eta^2}{1.2.3\cdots 2\eta-1}x^{2\eta-1} +$$

$$(16)\quad Q(x) = \frac{P_3}{1.2}x^2 + \frac{P_4}{1.2.3}x^3 + \cdots \cdots \frac{P_{2\eta+1}}{1.2.3\cdots 2\eta}x^{2\eta} +$$

Ἐξ ὧν ἡ (14) παριστᾷ ἀκεραίαν συνάρτησιν λόγῳ τῆς ὑποθέσεως $\sqrt[2\eta]{a_{2\eta}}_{\,\eta=\infty} < m$ ἔνθα m σταθερός.

Θά ἀποδείξωμεν ὅτι καί αἱ σειραί (15), (16) συγκλίνουσιν ἔν τινι κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα διάφορον τοῦ μηδενός.

Πράγματι δυνάμει τῶν σχέσεων (12) ἔχομεν :

$$\gamma_\eta^2 < \left[1.2.3\cdots(\eta-1)\right]^2 \delta_\eta^2$$

ἄρα $\dfrac{\gamma_\eta^2}{1.2.3\cdots(2\eta-1)} < \dfrac{1.2.3\cdots(\eta-1)}{\eta(\eta+1)\cdots(2\eta-1)}\,\delta_\eta^2$ καί ἐπειδή

$1.2.3\cdots(\eta-1) < \eta(\eta+1)\cdots(2\eta-2)$ ἕπεται :

$$(17)\quad \frac{\gamma_\eta^2}{1.2.3\cdots(2\eta-1)} < \frac{\delta_\eta^2}{2\eta-1}$$

ἀλλ' ἡ σειρά :

$$\frac{\delta_1^2}{1}x + \frac{\delta_2^2}{3}x^3 + \cdots \frac{\delta_\eta^2}{2\eta-1}x^{2\eta-1} \cdots +$$

συγκλίνει ἔν τινι κύκλῳ $r \neq 0$ (διότι) $\sqrt[\eta]{\delta_\eta} < m_1$ ἄρα καί $\left|\sqrt[2\eta+1]{\delta_\eta^2}\right| < m_1^{\frac{2\eta}{2\eta+1}} < m_2$ ἐπομένως δυνάμει τῆς (17) τοῦτ' αὐτό ποιεῖ καί ἡ σειρά (15), ἤτοι διά τιμάς

$|x| < \tau_1$ καί διά $\eta > \eta_1$ θά ἔχωμεν:

$$\frac{1}{(2\eta-2)(2\eta-1)}\left[\frac{\gamma_\eta}{\gamma_{\eta-1}}\right]^2 |x| < h < 1$$

Ἐξετάσωμεν νῦν τήν σειράν (16). Εὕρομεν ὅτι:

$$|P_{2\eta+1}| \leqq |\gamma_1 \gamma_{2\eta}| + |\gamma_2 \gamma_{2\eta-1}| + \dots + |\gamma_\eta \gamma_{\eta+1}|$$

καί δυνάμει τῶν σχέσεων (12)

$P_{2\eta+1} < \delta_1 \lfloor 2\eta-1 \; \delta_{2\eta} + \lfloor 1 \; \delta_2 \lfloor 2\eta-2 \; \delta_{2\eta-1} + \lfloor 2 \; \delta_3 \lfloor 2\eta-3 \; \delta_{2\eta-2} + \dots$

$\dots \lfloor \eta-1 \; \delta_\eta \lfloor \eta \; \delta_{\eta+1}$ ἤ ἔτι μᾶλλον

$$|P_{2\eta+1}| < 1.2.3\dots(2\eta-1)\left[\delta_1\delta_{2\eta} + \delta_2\delta_{2\eta-2} \dots + \delta_\eta \delta_{\eta+1}\right]$$

ἄρα: $\dfrac{|P_{2\eta+1}|}{1.2.3\dots 2\eta} < \dfrac{W_{2\eta+1}}{2\eta}$ (18), $W_{2\eta+1} = \delta_1\delta_{2\eta} + \delta_2\delta_{2\eta-1} + \dots \delta_\eta \delta_{\eta+1}$

ἀλλ' ἡ σειρά $\sum\limits_{\eta=1}^{\infty} \dfrac{W_{2\eta+1}}{2\eta} x^{2\eta}$ λέγω ὅτι συγκλίνει ἔν τινι κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα διάφορον τοῦ μηδενός (1)

Τῷ ὄντι $W_{2\eta+1} = \frac{1}{2}\left[\delta_1\delta_{2\eta} + \delta_2\delta_{2\eta-1} + \dots \delta_\eta\delta_{\eta+1} + \delta_{\eta+1}\delta_\eta + \dots \delta_{2\eta}\delta_1\right]$

Ἐπειδή δέ ἡ $W(x) = \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \delta_3 x^3 + \dots \delta_\nu x^\nu +$

συγκλίνει ἔν τινι κύκλῳ ἔχοντι ἀκτῖνα $\tau_2 \neq 0$ ἕπεται ὅτι καί ἡ σειρά ἡ ἔχουσα γενικόν ὅρον

$$2W_{2\eta+1}\, x^{2\eta+1} = \left[\delta_1\delta_{2\eta} + \delta_2\delta_{2\eta-1} + \dots + \delta_{2\eta}\delta_2\right] x^{2\eta+1}$$

συγκλίνει διά πάσας τάς τιμάς τοῦ x τάς πληρούσας τήν ἀνισότητα $|x|_\eta < \tau_2$

Διότι ἔστω

---

(1) Ἴδ. καί Jordan p. 279–284 τ. I.

$$2\sum_{\eta=1}^{n} W_{2\eta+1}\, x^{2\eta+1} = 2\left[W_3x^3+W_4x^4+\ldots+W_{2\eta+1}x^{2\eta+1}\right]$$

ὁπότε

$$2\sum_{\eta=1}^{n} W_{2\eta+1}x^{2\eta+1} = S_{2\eta}S_{2\eta} - \delta_1^2x^2 - \delta_2x^2\,\delta_{2\eta}x^{2\eta} - \delta_3x^3\left[\delta_{2\eta-1}x^{2\eta-1} - \delta_{2\eta}x^{2\eta}\right]$$

$$-\delta_4x^4\left[\delta_{2\eta-2}x^{2\eta-2}+\delta_{2\eta-1}x^{2\eta-1}+\delta_{2\eta}x^{2\eta}\right]-\ldots\ \delta_{2\eta}x^{2\eta}$$

$$\left[\delta_2x^2\ \ \delta_3x^3+\ \ldots\ +\delta_{2\eta}x^{2\eta}\right]$$

ἔνθα $\quad S_{2\eta}=\delta_1x+\delta_2x^2+\delta_3x^3+\ \ldots\ +\delta_{2\eta}x^{2\eta}$

$$\left|2\sum_{\eta=1}^{n} W_{2\eta+1}x^{2\eta+1} - SS\right| \leqq \left|S_{2\eta}S_{2\eta}-SS\right| + \delta_2|x|^2\ \delta_{2\eta}|x|^{2\eta}+\delta_3|x|^3$$

$$\left[\delta_{2\eta-1}|x|^{2\eta-1}+\delta_{2\eta}|x|^{2\eta}\right]+\ \ldots\ +\delta_{2\eta}|x|^{2\eta}\left[\delta_2|x|^2+\right.$$

$$\left.\ldots\ \delta_{2\eta}|x|^{2\eta}\right].$$

$$S = \text{ὁρ}\, S_\eta \qquad \text{διά} \quad \eta\to\infty$$

$$\delta_{2\eta}|x|^{2\eta}+\delta_{2\eta+1}|x|^{2\eta+1}+\ \ldots\ \delta_{2\eta+p}|x|^{2\eta+p} < \varepsilon_{2\eta} \quad \text{ὅταν } |x|<r_2.$$

$$\left|2\sum_{\eta=1}^{n} W_{2\eta+1}x^{2\eta+1}-S^2\right| \leqq \left|S_{2\eta}^2-S^2\right| + \delta_2|x|^2\,\varepsilon_{2\eta}+\delta_3|x|^3\,\varepsilon_{2\eta-1}+\delta_{2\eta}|x|^{2\eta}\varepsilon_2$$

ἐπειδή δέ ἡ ἀκολουθία $\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4 \ldots \varepsilon_{2\eta}$ δέν βαίνει αὐξανομένη ἤτοι $\varepsilon_2 \geqq \varepsilon_3 \geqq \varepsilon_4 \geqq \cdot \geqq \varepsilon_{2\eta}$ ἔπεται ὅτι

$$\left|2\sum_{\eta=1}^{n} W_{2\eta+1}x^{2\eta+1}-S^2\right| \leqq \left|S_{2\eta}^2-S^2\right| + \varepsilon_\eta\left[\delta_2|x|^2+\delta_3|x|^3+\ \ldots\right.$$

$$\left.+\delta_\eta|x|^\eta\right] + \varepsilon_2\left[\delta_{\eta+1}|x|^{\eta+1}+\delta_{\eta+2}|x|^{\eta+2}+\ \ldots\ \delta_{2\eta}|x|^{2\eta}\right.$$

$$\left|2\sum_{\eta=1}^{n} W_{2\eta+1}x^{2\eta+1}-S^2\right| \leqq \left|S_{2\eta}^2-S^2\right| + \varepsilon_\eta\,\varepsilon_2+\varepsilon_{\eta+1}\,\varepsilon_2$$

Ἐάν δέ ἡ η τείνῃ πρός τό ἄπειρον, ὅρ $S_{2\eta} = S$, ὅρ $\varepsilon_\eta = 0$

ἐπομένως:

$$\text{ὅρ}\left|2\sum_{\eta=1}^{n}{}_{\eta=\alpha} W_{2\eta+1}\, x^{2\eta+1} - S^2\right| = 0 , \quad |x| < \tau_2 \qquad \text{ὅ.ε.δ}$$

ἄρα καί ἡ σειρά ἡ ἔχουσα γενικόν ὅρον $\frac{W_{2\eta+1}}{\eta} x^{2\eta}$ συγκλίνει ὁμοίως· ἐπομένως, δυνάμει τῆς ἀνισότητος (18) καί ἡ σειρά (16) συγκλίνει ἐπίσης διά τιμάς τοῦ x ἀπολύτως μικροτέρας τοῦ τ_2.

Ἤτοι διά $|x| < \tau_2$ καί $\eta > \eta_2$

$$\frac{1}{2\eta} \quad \frac{|P_{2\eta+1}|}{|P_{2\eta}|}|x| < h < 1$$

Ἔστω νῦν ὅτι ὁ ἀριθμός β εἶναι κοινή ρίζα τῶν συναρτήσεων: $f(x)$, $\Gamma(x)$, $Q(x)$ ὁπότε θά ἔχωμεν:

$$f(b) = f_{2\eta}(b) + R_1(b) = 0$$

$$\Gamma(b) = \Gamma_\eta(b) + R_2(b) = 0$$

$$Q(b) = Q_{2\eta}(b) + R_3(b) = 0$$

ἔνθα

$$R_1(b) = \frac{a_{2\eta+1}}{1.2.3.(2\eta+1)} b^{2\eta+1} + \frac{a_{2\eta+2}}{1.2.3..(2\eta+2)} b^{2\eta+2} + \dots$$

$$R_2(b) = \frac{\gamma^2_{\eta+1}}{1.2.3\,(2\eta+1)} b^{2\eta+1} + \frac{\gamma^2_{2\eta+2}}{1.2.3..(2\eta+2)} b^{2\eta+3} + \dots$$

$$R_3(b) = \frac{P_{2\eta+2}}{1.2.3\,(2\eta+1)} b^{2\eta+1} + \frac{\Gamma_{2\eta+3}}{1.2.3..(2\eta+2)} b^{2\eta+2} + \dots$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν σχέσιν (6) λαμβάνομεν:

$$\gamma_{2\eta+1} = \frac{1.2.3..2\eta}{b^{2\eta+1}}\left[R_1(b) + \kappa R_2(b) + 2\kappa R_3(b)\right]$$

άρα

$$(19)\quad \left|\sqrt[2\eta+1]{\Gamma_{2\eta+1}}\right| = \frac{1}{\beta}\sqrt[2\eta+1]{\left[\frac{\alpha_{2\eta+1}}{2\eta+1}\beta^{2\eta+1} + \frac{\alpha_{2\eta+2}}{(2\eta+1)(2\eta+2)}\beta^{2\eta+2}\right] + \kappa\left[\frac{\gamma_{2\eta+1}}{2\eta+1}\beta^{2\eta+1}+\cdots\right] + \cdots + 2\kappa\left[\frac{P_{2\eta+2}}{2\eta+1}\beta^{2\eta+1}+\cdots\right]}\,\right|$$

Ἐπειδή δέ ἡ $A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_\nu x^\nu + \ldots$ συγκλίνει ἐν τινι κύκλῳ ἔχοντι ἀκτίνα διάφορον τοῦ μηδενός, ἔπεται εὐκόλως ὅτι ἐάν ἡ $A(x)$ εἶναι ὁμαλή διά $x = \beta$ θά ἔχωμεν:

$$\left|\frac{\alpha_{2\eta+1}}{2\eta+1}\beta^{2\eta+1} + \frac{\alpha_{2\eta+2}}{(2\eta+1)(2\eta+2)}\beta^{2\eta+2} + \cdots \frac{\alpha_{2\eta+\mu}}{(2\eta+1)\cdots(2\eta+\mu)}\beta^{2\eta+\mu}\right| < \varepsilon'_{2\eta}$$

ἔνθα $\varepsilon_{2\eta}$ τείνει πρός τό μηδέν μετά τοῦ $\frac{1}{\eta}$ δι οἱανδήποτε τιμήν τοῦ μ.

Ἐξετάσωμεν νῦν τάς σειράς:

$$\left|\frac{\gamma^2_{\lambda+1}}{2\lambda+1}\right||x|^{2\lambda+1} + \left|\frac{\gamma^2_{\lambda+2}}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)(2\lambda+3)}\right||x|^{2\lambda+3} + \cdot\left|\frac{\gamma^2_{\lambda+\mu}}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)\cdots(2\lambda+2\mu-1)}\right||x|^{2\lambda+2\mu-1}\cdots +$$

$\lambda > 0$

$$\left|\frac{P_{2\lambda+2}}{2\lambda+1}\right||x|^{2\lambda+1} + \left|\frac{P_{2\lambda+3}}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)}\right||x|^{2\lambda+2} + \left|\frac{P_{2\lambda+\mu}}{(2\lambda+1)\cdots(2\lambda+\mu-1)}\right||x|^{2\lambda+\mu-1} +$$

Ὁ λόγος τῆς πρώτης σειρᾶς εἶναι:

$$V_\lambda = \frac{1}{(2\lambda+2\mu-2)(2\lambda+2\mu-1)}\left[\frac{\gamma_{\lambda+\mu}}{\gamma_{\lambda+\mu-1}}\right]^2 |x|$$

ἀλλ' ἀπεδείχθη ὅτι διά τιμάς τάς πληρούσας την ἀνισότητα $|x| < z_1$ (ἔνθα z_1 ἡ ἀκτίς συγκλίσεως τῆς σειρᾶς

$\sum_{\eta=1}^{\infty} \frac{\delta_\eta^2}{2\eta-1}|x|^{2\eta-1}$) καί διά τιμάς τοῦ δείκτου $\eta > \eta_1$ ἔχομεν:

$$\frac{1}{(2\eta-2)(2\eta-1)} \left[\frac{\gamma_\eta}{\gamma_{\eta-1}}\right]^2 |x| < h < 1$$

ὅθεν διά τάς αὐτάς τιμάς τοῦ x καί διά τιμάς τοῦ $\lambda > \eta$ θά ἔχωμεν $\gamma_\lambda < h < 1$ συνεπῶς ἐάν $|b| < \tau_1$ ἤτοι ἐάν ἡ συνάρτησις

$$\triangle(x) = \frac{\delta_1^2}{1}x + \frac{\delta_2^2}{3}x^3 + \frac{\delta_3^2}{5}x^5 \dots \frac{\delta_\eta^2}{2\eta-1}x^{2\eta-1} +$$

εἶναι ὁμαλή διά $x = b$ θά ἔχωμεν:

$$\frac{1}{(2\lambda+2\mu-2)(2\lambda+2\mu-1)} \left[\frac{\gamma_{\lambda+\mu}}{\gamma_{\lambda+\mu-1}}\right]^2 |b| < h < 1 \quad \begin{cases} \lambda > \eta \\ \mu \quad 0, 1, 2, 3 \end{cases}$$

Ὅθεν ἐάν $|G_\lambda(b)|$ παριστᾷ τήν τιμήν τῆς ἐξεταζομένης σειρᾶς διά $x = b$ θά ἔχωμεν, ὅτι ἡ $|G_\lambda(b)|$ μένει πεπερασμένη διά πᾶσαν τιμήν τοῦ $\lambda > \eta_1$

Ἐντελῶς ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καί ἡ $Q_\lambda(b)$ ἔνθα

$$Q_\lambda(b) = \left|\frac{P_{2\lambda+2}}{2\lambda+1}\right| |b|^{2\lambda+1} + \left|\frac{P_{2\lambda+3}}{(2\lambda+1)(2\lambda+2)}\right| |b|^{2\lambda+2} +$$

μένει ἐπίσης πεπερασμένη ὅταν ἡ συνάρτησις:

$$W(x) = \sum_{\eta=1}^{\infty} \left[\delta_1 \delta_{2\eta} - \delta_2 \delta_{2\eta-1} \cdot - \delta_\eta \delta_{\eta+1}\right] x^{2\eta}$$

εἶναι ὁμαλή διά $x = b$ καί ὁ δείκτης λ λαμβάνει τιμάς μεγαλυτέρας τοῦ η_2

Λέγομεν νῦν ὅτι ἡ ἀκολουθία

(20) $\left|\sqrt[\eta]{H_\eta(b)\ L_\eta(b)}\right|, \left|\sqrt[\eta+1]{H_{\eta+1}(b)\ L_{\eta+1}(b)}\right| \dots$

ἔνθα $H_\eta(b) = |G_\lambda(b)| \quad L_\eta(b) = |Q_\eta(b)|$

καί η μεγαλείτερον τῶν η_1 καί η_2 εἶναι περατωμένη.

Τῷ ὄντι ἔστω θετικός τις ἀριθμός $m > 1$ λέγομεν ὅτι δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἀντίστοιχόν τινα τιμήν τοῦ η ἔστω τήν η' τοιαύτην ὥστε διά η>η' νά ἔχωμεν:

$$\left|\sqrt[\eta+\mu]{H_{\eta+\mu}(b) + L_{\eta+\mu}(b)}\right| < m \qquad \mu = 1.2.3\ldots\ldots$$

Διότι ἔστω ὅτι ἀπό τινος τιμῆς τοῦ η (μεγαλειτέρας τῶν η_1 καί η_2) καί ἑξῆς, ἤ δι' ἀπείρους τιμάς τοῦ η ἅς δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἀπό τῶν τιμῶν η_1, η_2 καί πέραν ἔχομεν:

$$(21) \quad \sqrt[\eta+\mu]{H_{\eta+\mu}(b) + L_{\eta+\mu}(b)} \geqq m$$

τότε καί $\qquad H_{\eta+\mu}(b) + L_{\eta+\mu}(b) \geqq m^{\eta+\mu}$

Ἀλλά ὅρ. $m^{\eta+\mu} = \infty$ διά $\eta \to \infty$ ὅπερ ἄτοπον, διότι μία ἐκ τῶν δύο ποσοτήτων $H_{\eta+\mu}(b)$ καί $L_{\eta+\mu}(b)$ τοὐλάχιστον δέν θά ἔμενε πεπερασμένη ὅταν τό η τείνη πρός τό ἄπειρον, ἐνῷ ἀμφότεραι ἀπεδείχθη ὅτι μένουν πεπερασμέναι διά πᾶσαν τιμήν τοῦ η μεγαλειτέραν τῶν η_1, η_2

Ἄρα ἀπό τινος στιγμῆς καί πέραν δέν εἶναι δυνατόν νά ἰσχύη ἡ σχέσις (21) συνεπῶς ἡ ἀκολουθία (20) εἶναι περατωμένη ὅθεν καί ἡ ἀκολουθία :

$$(22)\left|\sqrt[\eta]{\varepsilon'_\eta + \kappa H_\eta(b) + \varepsilon\kappa L_\eta(b)}\right|, \left|\sqrt[\eta+1]{\varepsilon'_{\eta+1} + \kappa H_{\eta+1}(b) + \varepsilon\kappa L_{\eta+1}(b)}\right| \ldots$$

$$\eta > \eta_1 \quad , \quad \eta > \eta_2$$

ἔνθα ε'_η τείνει τὸ μηδὲν μετὰ τοῦ $\frac{1}{\eta}$ εἶναι ὁμοίως περατωμένη. Ἔστω M τὸ ἀνώτερον πέρας τῆς (22) ὅτε δυνάμει τῆς (19) θὰ ἔχωμεν:

$$\left|\sqrt[2\eta+1]{\gamma_{2\eta+1}}\right| \leqq \left|\frac{1}{\beta}\sqrt{\varepsilon'_{2\eta+1}+\kappa H_{2\eta+1}(\beta)+2\kappa L_{2\eta+1}(\beta)}\right| < \frac{M}{|\beta|}$$

Ἐπομένως ὑπὸ τὰς ἄνω συνθήκας ὑπάρχει ὁλοκλήρωμα ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενὸς καὶ μηδενιζόμενον διὰ $x=0$

Εἰς τὰ αὐτὰ συμπεράσματα φθάνομεν καὶ ὅταν $\nu=2\eta$.

Ὅθεν συνάγομεν τὸ ἑξῆς θεώρημα:

Ἡ διαφορικὴ ἐξίσωσις (1) δέχεται ὁλοκλήρωμα ὁλόμορφον ἐν τῇ περιοχῇ τοῦ μηδενὸς καὶ μηδενιζόμενον διὰ τὴν τιμὴν ταύτην ὅταν ἡ παράμετρος β πληροῖ τὴν ἑξῆς συνθήκην.

Ὁ ἀριθμὸς β εἶναι κοινὴ ρίζα τῶν συναρτήσεων:

$$F(x)=a_0+\frac{a_1}{1}x+\frac{a_2}{12}x^2+\cdots+\frac{a_\nu}{1.2.3\ldots\nu}x^\nu+\ldots$$

$$\Gamma(x)=\frac{\gamma_1^2}{1}x+\frac{\gamma_2^2}{1.2.3}x^3+\cdots+\frac{\gamma_\nu^2}{1.2.3\ldots(2\nu-1)}x^{\nu-1}+\ldots$$

$$Q(x)=\frac{P_3}{12}x+\frac{P_4}{1.2.3}x^2+\cdots+\frac{P_{2\nu+1}}{1.2.3\ldots2\nu}x^{2\nu}+\ldots$$

Τιθεμένου ὅτι αἱ συναρτήσεις

$$A(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_\nu x^\nu+\ldots$$

$$\Delta(x)=\frac{\delta_1^2}{1}x+\frac{\delta_2^2}{5}x^3+\cdots+\frac{\delta_\nu^2}{2\nu-1}x^{2\nu-1}+\ldots$$

$$W(x)=\sum_{\eta=1}^{\infty}\left[\delta_1\delta_{2\eta}+\delta_{2\eta}+\delta_2\delta_{2\eta-1}+\cdots\delta_\eta\delta_{\eta+1}\right]x^{2\eta}$$

εἶναι ὁμαλαί διά $x = b$

Ἐν τοῖς ἀνωτέρω, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ παριστῶσι τούς συντελεστάς τοῦ ἀναπτύγματος τῆς συναρτήσεως ἥτις εἶναι τυπικόν ὁλοκλήρωμα τῆς διαφ. ἐξισώσεως (1). $\delta_1 \delta_2 \delta_3$ εἶναι οἱ συντελεσταί τοῦ ἀναπτύγματος τῆς συναρτήσεως τῆς ὁριζομένης ἀπό τῆς ἐξισώσεως

$$|b|\, y = xy + xA(x) + |\kappa|\, y^2$$

ἔνθα $A_1(x) = |a_0| + |a_1|\, x + |a_2|\, x^2 + \cdots a_\nu x^\nu + \cdots$

καί τέλος $P_{2\eta+1} = \gamma_1 \gamma_{2\eta} + \gamma_2 \gamma_{2\eta-2} + \cdots \gamma_\eta \gamma_{\eta+1}$

Περαίνων τήν παροῦσαν διατριβήν θεωρῶ ἱερόν καθῆκον μου νά εὐχαριστήσω δημοσίᾳ τούς σοφούς Καθηγητάς μου ἰδίᾳ δέ τόν κ. Π. Ζερβόν ὅστις μέ καθωδήγησεν εἰς μερικά σημεῖα τῆς διατριβῆς μου.

Ἀθῆναι Μάρτιος 1930